د لوړو زده کړو وزارت

د کابل پوهنتون ریاست

ساینس پوهنځی

رياضي څانګه

په فزيک کې د رياضي ميتودونه

ليکوالان: پوهندوی خالق داد فيروز کوهي

او پوهنمل منيژه سرهنګ

ژباړن: احمد وليد وردګ

د کتاب ځانګړتياوې

د کتاب نوم : په فزيک کې د رياضي ميتودونه

مؤلفين : پوهندوی خالق داد فيروز کوهي او پوهنمل منيژه سرهنګ

ژباړن : احمدوليد وردګ (0700060619)

کمپوز : محمدافضل ذاکر (0785695700)

خپرندوی: زرغون خپرنيز او د ژباړې مرکز

چاپ نېټه : ۱۳۹۲ هـ - ل .

د چاپ وار : لومړی

شمېر : ۱۰۰۰ ټوک

اهدآ

خپلې مشرې خور ته چې تل يې د
شهامت او استقامت درس راکړی.

لیکلړ

سرلیک	مخګڼه

لومړی څپرکی

دویم څپرکی

دریم څپرکی

د یادښت په توګه

زموږ ګران هیواد افغانستان دا دري لسیزې کېږي چې له بهرنه د تپل شوې جګړې په اور کې سوځي، ددې جګړې په اور کې نه یوازې زموږ د ګران هیواد مادي شتمنۍ له خارور سره خاروې شوې، بلکې زموږ د هیواد معنوي شتمنۍ هم له منځه تلو سره مخ شوې او موږ په دواړو خواوو کې له فقدان سره مخ شوو. زموږ د هیواد په ملي ژبو د علمي کتابونو نه شتون یوه داسې ستونزه ده چې ډیري په علم او کتاب مین محصلین او ځوانان ورسره لاس او ګریوان دي. زرغون خیږنیز او د ژباړې مرکز هوډمند دی چې په لومړي ګام کې د هیواد په پوهنتونونو کې درسي کتابونه له یوې ملي ژبې څخه بلې ته او په بل ګام کې د نړۍ له نورو ژبو څخه علمي کتابونو خپلو ملي ژبو ته وژباړي. زرغون د ژباړې مرکز ویاړي چې دداسې ځوانانو یوه ټولګه په خپل جوړښت کې لري، چې خپلو ملي ژبو ته د علمي کتابونو د ژباړې لپاره کلک هوډمند دی. ددې ځوانانو د هڅو په پایله کې ګڼ شمیر کتابونه دي چې ژباړه یې بشپړه شوې او د چاپ پر لیکه ولاړ دي. له دې جملې څخه دا دې د الله رب العزت په مرسته تر ټولو لومړی کتاب چې د زرغون د ژباړې مرکز له خوا ټولنې ته وړاندې کیږي (په فزیک کې د ریاضي میتودونو) تر سرلیک لاندې دی، چې ددغه مرکز د یوه تکړه غړي احمد ولید وردګ په قلم یې ژباړه پای ته ورسیده او د چاپ په زیور سمبال او ستاسې په لاسونو کې دی.

د لوی رب له دربار څخه ښاغلي وردګ ته ددغې ستر خدمت په بدل کې لوی اجر غواړو او دا کتاب هغو ورېو او خویندو ته موثر تمامیدای شي چې د فزیک، ریاضي او انجنیرۍ په څانګو کې خپلو خلکو ته د چوپړ په نیت په کار بوخت دي، امید لرو چې دوی ترې نسبي ګټه پورته کړي.

په درنښت

انجنیر محمد نعمان موحد

د زرغون څیړنیز او د ژباړې د مرکز لوی سلاکار او د مسلکي کمیټې مشر

1392/2/30 کابل افغانستان

مخکېنۍ خبرې

له رسنیو څخه مو د وطن د ویجاړۍ په اړه ډیري خبرې اوریدلي، زه غواړم چې د یوې بلې زاویې څخه خبرې وکړم.

تاسې هغه کتاب لولي چې (فزیک کې د ریاضي د میتودونو) تر نامه لاندې په دري ژبه مو نشر کړی وو؛ خو د ښاغلي احمد ولید وردګ په کوشش پښتو ملي ژبې ته راواړول شو، ښاغلي وردګ چې کشرتوب او ذهینتوب یې سره متناسب دی، په ډېر هنر او مهارت دغه کتاب پښتو ته راوژباړو او ما دا کتاب په پوره دقت ولوست متن له هر ډول اغماض او تخنیکي ستونزو څخه مستثنی دی، ما دده د ژباړې یو شی ډیر خوښ شول هغه دا چې داسې تصور نکیږي چې کتاب دې ژباړل شوي وي. زه ددغې باتوره او با قلمه ځوانانو په لیدو سره نور هم د وطن پرمختګ او سوکالۍ ته امیدواره کیږم.

په هر ترتیب د متن په بې ځایه اطالې نغواړم ستاسې مبارک وخت ونیسم، نو ښاغلي وردګ ته دده د کتاب د بشپړیدو مبارکي وایم ده ته د لا زیاتو پرمختګونو هیله کوم.

په درنښت

پوهندوی خالق داد فیروز کوهي

د کابل پوهنتون د ساینس پوهنځي د ریاضي څانګې استاد

سریزه

رياضي د ټولو علومو او پرمختګونو نړيواله ژبه ده، چې د بشر د تمدن او پرمختګ لپاره په نړيوال فرهنګ کې کاريږي.
عالي رياضيات، د طبعي علومو او طبيعت ژبه ده، د طبيعي علومو د څانګو په تېره بيا د تخنيک او صنعت د پوهيدو لپاره اړينه ده چې د علومو او رياضياتو په اړه نسبي معلومات ولرو. رياضي خپل د پرمختګ مسير په دوو بعدونو کې وهلی، لومړی رياضي ته د طبيعي علومو د لاس د اوږدوالي په خاطر، دويم د خپلو بيلابيلو څانګو له متقابلې اړيکې له وجهې، په تېره بيا په اوسني وخت کې چې د الکترونيک صنعت خصوصاً د مختلفو برخو کې د کمپيوتر کاروني ددې علم په اهميت شهادت ورکوي او رياضي يې نوره هم زمونږ تر نظره مهمه کړې؛ نو ويلی شو چې د علومو د حصول لپاره د رياضي نه درک په خپلو راتلونکو اهدافو پښه اړول او سترګې پرې پټول تعبيريدای شي.
(په فزيک کې د رياضي ميتودونه) مضمون د رياضي هغه په زړه پورې او جالبه موضوع ده، چې د فزيکي مسايلو د تشريح او توضيح لپاره کاريږي. دا خو ټولو ته جوته ده چې طبيعت په نسبي ډول حرکت کوي، يعنې د اجسامو حرکت نسبت نورو اجسامو او هغه محيط ته چې حرکت پکې کوي څيړل کيږي.
په طبيعت کې بيلابيل اجسام له بيلابيلو حرکتونو او ډولونو سره موجود دي، لکه مستقيم الخط حرکتونه، دوراني حرکتونه، پيچشي حرکتونه، اهتزازي حرکتونه او داسې نور حرکتونه يادولی شو. د تکنالوژۍ په نړۍ کې د اجسامو اهتزازي حرکتونه ډېر کاريږي لکه د مصنوعي اقمارو په حرکت او داسې نورو تکنالوژيو کې په پراخه توګه کاريږي او ډير اهميت لري، چې په هر يوه يې بيل بيل او ځانګړي قوانين حاکم دي، د تکنالوژۍ په دنيا کې د

تخنيک بيلابيل څپرکي همدې مختلف فورمولونو په معين وختيز انټروالونو کې پرانيستي، نو له دې وجهې د بيلابيلو اهتزازي حرکتونو د فورمولونو او قوانينو او په مختلفو برخوکې يې د کارونو پوهيدل لومړني او حتمي شروط دي.
د رياضي د مطالبو پراخوالي تر ډيره بريده په علومو او مهندسۍ کې ددغه علم د تمرکز او مناسبي زده کړې لپاره حدود وضع کړي؛ نو محصلين ددې علم د زده کړې او تطبيق پرمهال د ستونزو سره مخ کيږي، خو د زيات تعمق په صورت کې دغه اصل کاملاً منهدم کيدای شي. دغه مضمون به مو هله ښه زده شي چې په بنسټيزه رياضي، تفاضلي معادلو او وکتوري اناليز مو ځان ښه ملا کړي وي.
ددې کتاب موضوعګانې د معمولي تفاضلي معادلو په دوام ليکل شوي، چې په دوو موضوعګانو (د ځانګړو تابع ګانو تيوري او قسمي تفاضلي معادلو) متمرکز دي خو ياد مباحث په دريو څپرکو کې رانغښتل شوي.
په لومړي څپرکي کې د ځانګړو تابع ګانو(د ګاما، بيتا، بسل، لژاندر، استرلنګ، هرميت او لاګر تابع ګانو) په اړه کښل شوي.
قسمي تفاضلي معادلې، ډولونه يې (د څپې، د تودوخې او د لاپلاس معادلې)، حل يې، سرحدي او لومړني شرايط، د دويم څپرکي عمده مباحث دي.
په دريم څپرکي کې د دويم مرتبه خطي تفاضلي معادلو د ډلبندۍ او په کانوني شکل د قسمي تفاضلي معادلو د شکل بدلون سره مخ کيږو.
ددې کتاب مطالب د کابل پوهنتون د ساينس پوهنځي د فزيک د دريم او د رياضي څانګې د څلورم ټولګيو د محصلينو، د ښوونې او روزنې پوهنتون د طبيعي پوهو پوهنځيو او د انجنيري فاکولتو د محصلينو لپاره يو ښه تدريسي ممد دی او د تطبيقي رياضي يو له مهمو مضامينو څخه ګڼل کيږي.

ليکوالان

تاریخي شهکار

ټولو ته زیری ورکوم چې نور نو په مورنۍ ژبه د تدریسي کتابونو د قلت ستونزه مخ په امحا کیدو ده، زرغون څیړنیز او د ژباړې مرکز هغه یوازینۍ ټولنه ده، چې په ریښتني ډول د دردمنو محصلینو د ستونزو د اوارولو لپاره عملي ګامونه د خپلو تحصیلي مکلفیتونو ترڅنګ پورته کوي، دغه مرکز د کابل او پولیتخنیک پوهنتونونو د شهکاري محصلینو په اهتمام جوړه شوې او په پام کې ده، چې په ډیرو نږدې راتلونکو کې به د ټولو تحصیلي موسئسو، ټول تدریسي کتابونه ملي ژبو ته راواړوي، یاده دې وي چې دې ته ورته شعارونه ډېرو ټولنو ورکول خو له بده مرغه عملاً یې څه ونشوای کړای، بالعکس زرغون څیړنیز او د ژباړې مرکز چې میاشت هم له جوړیدو یې نه اوړي دا دي نږدې لس جلده بیلابیل کتابونه په بیلابیلو برخو کې چاپ ته تیار کړي او ډېر ژر به ستاسې سترګې ښکل کړي، عمومي ریاضي چې د پوهاند عبدالحق ایمل په زیار بشپړ شوې (تالیف)، د محمد نعمان موحد، مطیع الله هوتک، احمد فهمیم سپین غر، محمد اقبال لامع او حکمت الله دانش ژباړې په مطبعه کې د چاپ د ماشین تر څنګ پرتې دي او نورو محصلینو هم کارونه پیل کړي چې ژر تر ژره به زمونږ او تاسې تر لاسونو را ورسیږي.

تاسې (په فزیک کې د ریاضي د میتودونو) تر عنوان لاندې ګتاب لولئ چې ښاغلي استاد پوهندوي خالق داد فیروز کوهي او آغلې پوهنمل منیژې سرهنګ په دري ژبه چاپ او خپور کړی وو او دادی د خوږو محصلینو په مشوره او د عزوجل خدای په اراده پښتو ته راواړول شو او دغه اثر د فزیک، انجنیري او ریاضي محصلینو لپاره د ریاضي او فزیک د مسئالو ښه درک ته یو ښه ممد دي، لکه چې پوهیږې ریاضي د فزیک ژبه ده، یعني مونږ به په فزیک برخه کې د خپل مافي الضمیر په افاده کې پاتې راشو که چېرې د

ریاضي ژبه مو سمه نه وي زده؛ نو هیله مې د افغان محصلینو څخه داده چې ددې کتاب په ښه لوست او زده کړې سره ځانونه داسې خوله ور کړي چې په زړه کې مو هیڅ خبره هم پاتې نشي او د طبیعت لیدلی حال د معادلو په مرسته په وضاحت بیان کړای شي.

له متفکر استاد پوهندوي فیروز کوهي صیب څخه مننه کوم چې د ژباړې په برخه کې یې پوره مرسته راسره وکړه او الله ته لاسونه لپه کوم چې د خپل هنرمند ملګري (**محمد افضل ذاکر**) هنرمندې ګوتې تل همداسې محرکې ولري.

اشتباه انساني خاصه ده نو که چیرې له داسې متن سره چې ناسم درته بریښیدو مخ شوې، هرو مرو یوه کرښه ترې راکش او بیا یې له خپل ورور سره شریکه کړې ترڅو د کتاب د نورو چاپونو لپاره دغه خلا مرفوع شي.

له دعا او مینې مو مه هیروئ
ستاسې
احمد ولید وردګ
زرغون څیړنیز او د ژباړې مرکز، ۱۳۹۲
کال، د غوایي د میاشتې شپاړلسم، د شپې
۱۲:۱۱ بجې، کابل افغانستان

لومړی څپرکی

د ګاما تابع (*Gammas Function*)

د لړیو څخه په استفادې سره د تفاضلي معادلو په حل کې کله، کله له لاندې حاصل ضرب سره مخ کیږو: $\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)...(\alpha+n)$ دغه د ضرب حاصل د ګاما تابع $\Gamma(x)$ له جنسه کولی شو بیان کړو.

د $x>0$ لپاره د ګاما تابع په لاندې ډول تعریفیږي: $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

ګاما تابع $x>0$ قیمت ته متقاربه او $x\le 0$ ته متباعده ده او په $[0,\infty]$ ساحه کې متمادي او د مشتق نیولو وړ ده.

د ګاما تابع ځانګړتیاوې

لومړی خاصیت: د هر حقیقي مثبت x عدد لپاره کولی شو ولیکو چې:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

ثبوت : د ګاما د تابع له تعریفه لرو :

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \Rightarrow \Gamma(x+1)=\int\limits_0^\infty t^{x}e^{-t}dt$$

له دې چې پاسیني انتیګرال یو غیر واقعي انتیګرال دی، نو ددې انتیګرال د حل لپاره د بای پارت طریقه کاروو .

$$*\begin{pmatrix} u=t^x \Rightarrow du=xt^{x-1}dt \\ dv=e^{-t}dt \Rightarrow v=-e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(x+1)=\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^r t^x e^{-t}dt \overset{*}{=} \lim_{r\to\infty}\left[\left(-t^x e^{-t}\right)\Big|_0^r + x\int\limits_0^r t^{x-1}e^{-t}dt\right] = x\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^r t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) رابطې ته تکراري رابطه یا رجعي رابطه او یا بېرته راګرځېدونکې رابطه هم وایي.

ګاما تابع په فزیکي مسایلو کې، په فزیک کې د احتمالونو شمېرنو، فزیکي مسایل لکه د کولني موجونو تابع او د نورو توابعو منځ ته راوستو کې چې فزیکي ارزښت لري په پراخه توګه کارول کیږي.

د منفي اعدادو ګاما تابع

اوس $\Gamma(x)$ د $x \le 0$ لپاره تعریفوو، ددې کار لپاره د رجعي رابطې څخه یو نوی فورمول اقتباسوو.

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1) \quad ,x<0$$

که $x=0$ شي، فورمول په لاندې ډول ښودل کیږي:

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)\to\infty$$

پاسینۍ رابطې ته په کتنې سره ویلی شو چې ګاما نه یوازې صفر ته بلکې په ټولو صحیح منفي اعدادو کې نامتناهي ده یعنې:

$$\Gamma(x)\to\infty \quad , \quad x\in Z_-$$

تبصره

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$
$$\Gamma(x+2)=\Gamma(x+1+1)=(x+1)\Gamma(x+1)=x(x+1)\Gamma(x)$$
$$\Gamma(x+3)=\Gamma[(x+2)+1]=(x+2)\Gamma(x+2)=x(x+1)(x+2)\Gamma(x)$$
$$\dots$$
$$\Gamma(x+n)=\Gamma[(x+n-1)+1]=(x+n-1)\Gamma(x+n-1)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)\Gamma(x)$$

د رجعي رابطې پواسطه د منفي غیرصحیح اعدادو د ګاما تابع لپاره داسې لیکو:

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad , \quad x\neq 0$$
$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} \quad , \quad x\neq 0 \quad , \quad x\neq -1$$

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+3)}{x(x+1)(x+2)} \quad , \quad x\neq 0 \quad , \quad x\neq -1 \quad , \quad x\neq -2$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots\Gamma(x+n-1)} \quad , \quad x\neq 0,-1,-2,\cdots,(-n+1)$$

مثالونه

1. $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ د $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ له جنسه ترلاسه کړی ؟

حل:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\Rightarrow\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{15}{4}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

2. $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$ د $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ له جنسه مساوي په څو دی ؟

حل:

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{9}{2}+1\right)=\frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)=\frac{9}{2}\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{63}{4}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{63}{4}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{63}{4}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{315}{8}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{315}{8}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{945}{16}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{945}{16}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{945}{32}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

3. $\Gamma\left(\frac{-5}{3}\right)$ د $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ له جنسه پیدا کړی ؟

حل : د منفي اعدادو لپاره د ګاما فورمول په کارونې سره دغه پوښتنه ځوابوو :

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad , \quad x\neq 0$$

$$\Gamma\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{-5}{3}+1\right)}{\frac{-5}{3}}=\frac{-3}{5}\Gamma\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-3}{5}\frac{\Gamma\left(\frac{-2}{3}+1\right)}{\frac{-2}{3}}=\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

دویم خاصیت:

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad , \quad \forall n\in IN\cup\{0\}$$

ثبوت : د ریاضي د اندکیشن څخه په استفادې سره لیکلی شو :

1. **د اندکیشن پیل**: د $n=0$ لپاره لرو چې :

$$\Gamma(n+1)=\lim_{r\to\infty}\int_0^r t^n e^{-t}dt \Rightarrow \Gamma(0+1)=\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-t}dt=\lim_{r\to\infty}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^r=1\Rightarrow\Gamma(1)=1=0!$$

2. **د اندکیشن فرضیه**: داسې انګیرو چې : $\Gamma(n+1)=n!$ د n لپاره صحیح وي، نو د $(n+1)$ لپاره ثبوتو چې :

$$\Gamma[(n+1)+1]=(n+1)\Gamma(n+1)=(n+1)n!$$

پایله کې ترلاسه کوو چې : $\Gamma(n+1)=n!$ •

دریم خاصیت :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

ثبوت :

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \overset{x=\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt$$

لاندې تعویض ورته په پام کې نیسو :

$$*\left(u^2=t\Rightarrow 2udu=dt \quad , u\to 0\Rightarrow t\to 0 \quad , u\to\infty\Rightarrow t\to\infty\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt\overset{*}{=}\int_0^\infty\left(u^2\right)^{\frac{-1}{2}}e^{-u^2}(2udu)=2\int_0^\infty u^{-1}ue^{-u^2}du=2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\int_0^\infty e^{-u^2}du\right)^2=\left(2\int_0^\infty e^{-u_1^2}du_1\right)\left(2\int_0^\infty e^{-u_2^2}du_2\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(u_1^2+u_2^2\right)}du_1du_2$$

په قطبي سیستم د قایم مختصاتو له اړونې څخه لرو چې :

$$u_1(r,\theta)=r\cos\theta,\ u_2(r,\theta)=r\sin\theta$$

$$u_1^2+u_2^2=r^2$$

د ژاکوبي دیترمینانت څخه لیکلی شو :

$$f: IR^2\to IR^2$$

$$(u_1,u_2)\mapsto f(u_1,u_2)=[f_1(u_1,u_2), f_2(u_1,u_2)]=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(r,\theta)}=\frac{\partial u_1\partial u_2}{\partial r\partial\theta}=\begin{vmatrix}\partial u_1/\partial r & \partial u_1/\partial\theta\\ \partial u_2/\partial r & \partial u_2/\partial\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u_1\partial u_2}{\partial r\partial\theta}=r\Rightarrow du_1du_2=rdrd\theta \quad ,0\le r<\infty \quad ,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

پـه پاسـيني انتيګـرال کـې د du_1du_2 پرځـای قيمـت يـې اچـوو چـې لـه ژاکوبي ديترمينانت څخه $rdrd\theta$ ترلاسه شوی يعني :

- $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

مثال: وښيي چې : $\int_0^\infty t^a e^{-bt}dt = \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} \quad , a>-1 \quad , \quad b>0$

حل : ددې مثال د حل لپاره لاندې تعويض په پام کې نيسو :

$$*\left(bt=u \Rightarrow t=\frac{1}{b}u \Rightarrow dt=\frac{1}{b}du \quad , \quad t\to0\Rightarrow u\to0 \quad , t\to\infty\Rightarrow u\to\infty\right)$$

$$\int_0^\infty t^a e^{-bt}dt \overset{*}{=} \int_0^\infty \left(\frac{1}{b}u\right)^a e^{-u}\frac{1}{b}du = \frac{1}{b^{a+1}}\int_0^\infty u^a e^{-u}du = \frac{1}{b^{a+1}}\int_0^\infty u^{a+1-1}e^{-u}du = \frac{1}{b^{a+1}}\Gamma(a+1)$$

مثال: ثبوت کړی چې :

$$\Gamma^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt \quad , t\neq1$$

حل : دغه مثال د رياضي د اندکشن پواسطه حل کوو :

1. **د اندکشن پيل**: د $n=1$ لپاره ثبوتوو چې :

$$\Gamma'(x)=\frac{d}{dx}\Gamma(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty e^{-t}\frac{d}{dx}\left(t^{x-1}\right)dt=\int_0^\infty e^{-t}\frac{d}{dx}e^{\ln t^{x-1}}dt=\int_0^\infty e^{-t}\frac{d}{dx}e^{(x-1)\ln t}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}e^{(x-1)\ln t}(\ln t)dt=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)dt$$

2. د اندکشن فرضيه: د n لپاره فرضوو چې :

$$\Gamma^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt \quad , t\neq1$$

صحيح ده.

3. اوس د $n+1$ لپاره ثبوتوو چې :

$$\frac{d^{(n+1)}}{dx^{n+1}}\Gamma(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n)}}{dx^n}\Gamma(x)\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt\right)=\int_0^\infty e^{-t}(\ln t)^n\frac{d}{dx}\left(t^{x-1}\right)dt=\int_0^\infty e^{-t}(\ln t)^n\frac{d}{dx}e^{\ln t^{x-1}}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}(\ln t)^n\frac{d}{dx}e^{(x-1)\ln t}dt=\int_0^\infty e^{-t}(\ln t)^n e^{(x-1)\ln t}\ln t dt=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^{n+1}dt$$

$$\frac{d^{(n+1)}}{dx^{n+1}}\Gamma(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n)}}{dx^n}\Gamma(x)\right)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^{n+1}dt$$

مثال: وښيي چې : $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$ ده ؟

حل : له رجعي رابطې څخه پوهيږو چې : $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right]=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)+1\right]$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(x)$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3\cdot1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

د ګاما تابع سره د فکتوريل اړيکه :

$$1\cdot \int_0^\infty e^{-\alpha x}dx \overset{?}{=} \frac{1}{\alpha}$$

حل :

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-\alpha x}dx = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right)\Big|_0^r = \frac{1}{\alpha}$$

$$2\cdot -\int_0^\infty xe^{-\alpha x}dx \overset{?}{=} -\frac{1}{\alpha^2}$$

حل :

$$\lim_{r\to\infty} -\int_0^r xe^{-\alpha x}dx = -\lim_{r\to\infty}\left[\left(-\frac{x}{\alpha}e^{-\alpha x}\right)\Big|_0^r + \int_0^r \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}dx\right] = -\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

$$3\cdot \int_0^\infty x^2e^{-\alpha x}dx \overset{?}{=} \frac{2!}{\alpha^3}$$

حل :

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u x^2e^{-\alpha x}dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u x^{3-1}e^{-\alpha x}dx$$

$$*\left(\alpha x = t \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}t \Rightarrow dx = \frac{1}{\alpha}dt\ ,\ x\to 0 \Rightarrow t\to 0\ ,\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty\right)$$

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u x^{3-1}e^{-\alpha x}dx \overset{*}{=} \lim_{u\to\infty}\int_0^u\left(\frac{1}{\alpha}t\right)^{3-1}e^{-t}\frac{1}{\alpha}dt = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{\alpha^3}\int_0^u t^{3-1}e^{-t}dt = \frac{1}{\alpha^3}\Gamma(3) = \frac{2!}{\alpha^3}$$

$$\vdots$$

$$n-1\cdot \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s x^n e^{-\alpha x}dx = \lim_{s\to\infty}\int_0^s x^{n+1-1}e^{-\alpha x}dx$$

$$*\left(\alpha x = t \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}t \Rightarrow dx = \frac{1}{\alpha}dt\ ,\ x\to 0 \Rightarrow t\to 0\ ,\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty\right)$$

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s x^{n+1-1}e^{-\alpha x}dx \overset{*}{=} \lim_{s\to\infty}\int_0^s\left(\frac{1}{\alpha}t\right)^{n+1-1}e^{-t}\frac{1}{\alpha}dt = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\lim_{s\to\infty}\int_0^s t^{n+1-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

که په وروستي انتيګرال کې $\alpha = 1$ واچول شي بيا لرو چې :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r x^n e^{-x}dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r x^{n+1-1}e^{-x}dx = \Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1 = 0!$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$$

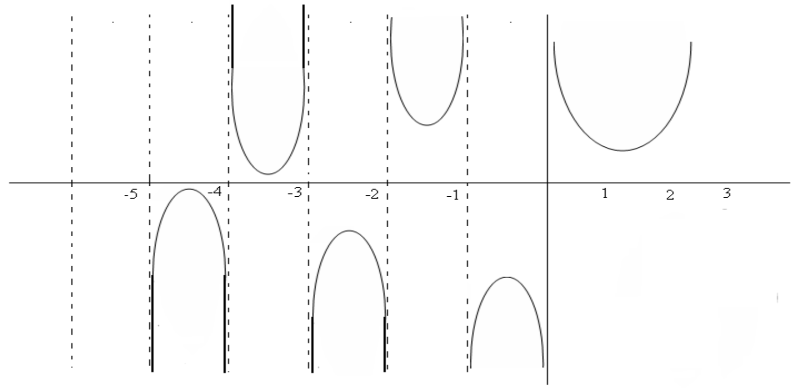
د ګاما تابع او فکتوريل ترمنځ اړيکه په بل شکل هم ثبوتولی شو :

$$\Gamma(1) = 1 = 0!$$
$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = \Gamma(1) = 1! = 0!$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2\Gamma(1) = 2\cdot 1! = 2 = 2!$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

د ګاما تابع د قیمتونو لست او ګراف یې

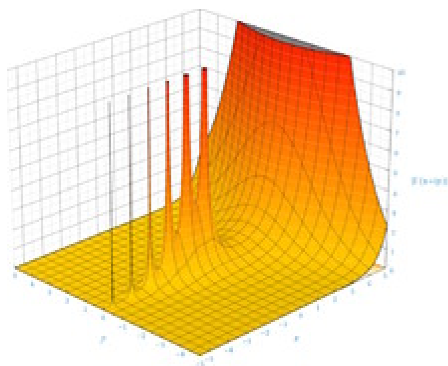
باید وویل شي چې منفي تام اعداد په مجانبونو کې او منفي کسري اعداد د ګراف په ترسیم کې برخه لري.

n	1.00	1.10	1.20	$\cdots$	1.90	2.00
$\Gamma(n)$	1.0000	0.9541	0.9182	$\cdots$	0.9618	1.0000



بالاخره ټول مثبت اعداد کولای شو ولیکو :

$$\Gamma(n) = 1.2.3\cdots(n-1) = (n-1)!$$



تمرین

1. له رجعي فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره په ګاما تابع کې د مثبت او منفي اعدادو لپاره لاندې پوښتنې حل کړی ؟

$a \cdot \Gamma\left(\frac{-7}{2}\right)$ $\qquad d \cdot \Gamma\left(\frac{13}{2}\right)$

$b \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ $\qquad e \cdot \Gamma\left(\frac{-11}{2}\right)$

$c \cdot \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right)$ $\qquad f \cdot \Gamma\left(\frac{17}{2}\right)$

2. وښیې چې :

$$g \cdot \int_0^\infty t^a b^{-t} dt = \frac{\Gamma(a+1)}{(\ln b)^{a+1}} \quad , \quad a>-1, b>1$$

$$h \cdot \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{y}\right)^{x-1} dy = \Gamma(x) \quad , \quad k \cdot \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$i \cdot \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-(y)^{\frac{1}{x}}} dy = \Gamma(x) \quad , \quad l \cdot \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$$j \cdot \int_0^\infty e^{-\sqrt[x]{t}} dt = x\Gamma(x) \quad , \quad m \cdot \int_0^\infty x^{\frac{2}{3}} e^{-x} dx = \Gamma(\frac{5}{3})$$

$$n . \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1}(n-1)!}{(2n-1)!}\sqrt{\pi} \quad , \quad o \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$$

بيتا تابع $(Betas\ \ Function)$

بيتا تابع هم د يوه معين انتيګرال په مرسته تعريفيږي :

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \quad x,y>0$$

د بيتا تابع ځانګړتياوې

1. د بيتا تابع نسبت x او y متحولينو ته متناظره ده يعنې :

$$B(x,y)=B(y,x)$$

ثبوت : له دې چې : $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ ده؛ نو د ثبوت لپاره لاندې تعويض په پام کې نيسو :

$$*\left(u=1-t\Rightarrow t=1-u\Rightarrow dt=-du\ ,\ t\to 0\Rightarrow u\to 1, t\to 1\Rightarrow u\to 0\right)$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\overset{*}{=}-\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}du=\int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du=B(y,x)$$

2. که د بيتا تابع په انتيګرال کې $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $t=\dfrac{u}{a}, a\neq 0$ تعويض کړو نو :

$$\bullet\left(t=\frac{u}{a}\Rightarrow dt=\frac{du}{a}\ ,\ t\to 0\Rightarrow u\to 0, t\to 1\Rightarrow u\to a\right)$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\overset{\bullet}{=}\int_0^a\left(\frac{u}{a}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{a}\right)^{y-1}\frac{du}{a}=\frac{1}{a^x}\int_0^a u^{x-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)^{y-1}du$$

$$=\frac{1}{a^{x+y-1}}\int_0^a u^{x-1}(a-u)^{y-1}du$$

$$\Rightarrow B(x,y)=\frac{1}{a^{x+y-1}}\int_0^a u^{x-1}(a-u)^{y-1}du$$

3. د مثلثاتي توابعو له جنسه د بيتا تابع د ترلاسه کولو په منظور لاندې تعويض په پام کې نيسو :

$$t=\sin^2\theta$$

$$*\left(dt=2\sin\theta\cos\theta\ ,\ 1-t=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta\ ,\ t\to 0\Rightarrow\theta\to 0\ ,\ t\to 1\Rightarrow\theta\to\frac{\pi}{2}\right)$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\overset{*}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{x-1}\left(\cos^2\theta\right)^{y-1}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

$$\Rightarrow B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

4. که د بيتا تابع په انتيګرال کې : $t=\dfrac{u}{1+u}$ داسې چې $u>0$ وي تعويض شي، ترلاسه کيږي چې :

$$*\begin{pmatrix} dt=\dfrac{du}{(1+u)^2}\ ,\ t=\dfrac{u}{1+u}\Rightarrow t(1+u)=u\Rightarrow t+ut=u\Rightarrow ut-u=-t\Rightarrow u(t-1)=-t \\ u(1-t)=t\Rightarrow u=\dfrac{t}{1-t}\ ,\ t\to 0\Rightarrow u\to 0\ ,\ t\to 1\Rightarrow u\to\infty \end{pmatrix}$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \overset{*}{=} \int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{y-1}\frac{du}{(1+u)^2}=\int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1+u-u}{1+u}\right)^{y-1}\frac{du}{(1+u)^2}$$

$$=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}(1+u)^{y-1}(1+u)^2}=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

$$\Rightarrow B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

د ګاما او بیتا تابع ترمنځ اړیکه

بیتا تابع په ډېره آسانۍ د ګاما تابع له جنسه ښودلی شو او ددې دوو تابع ګانو ترمنځ رابطه په لاندې ډول ده :

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad , \quad x,y\neq 0$$

دغه رابطه ثبوتوو.

ثبوت : ددې ثبوت لپاره د ګاما تابع له انتیګراله استفاده کوو ، او لاندې تعویض ورته په پام کې نیسو :

$$*\left(t=u^2 \Rightarrow dt=2udu\ , t\to 0\Rightarrow u\to 0\ , t\to\infty\Rightarrow u\to\infty\right)$$

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \overset{*}{=} \int_0^\infty (u^2)^{x-1}e^{-u^2}\,2udu=2\int_0^\infty (u)^{2x-2}e^{-u^2}udu=2\int_0^\infty (u)^{2x-1}e^{-u^2}du$$

$$\Gamma(y)=2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)=\left(2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du\right)\left(2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv\right)$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty (r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2y-1}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta\right)\left(2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr\right)$$

$$=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y)\Rightarrow B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad , \quad x,y\neq 0$$

مثال: وښیی چې :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\, d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot 3!}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$$

حل :

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

د ګاما او بیتا تابع ګانو ترمنځ د رابطې پر بنسټ دغه مثال حل کولی شو :

$$2x-1=6\Rightarrow x=\frac{7}{2} \quad , \quad 2y-1=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

$$B\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\cdot\Gamma(4)}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{12}\frac{15}{6}\sqrt{\pi}=\frac{15}{72}\pi$$

مثال: که $x+y=5$, $x-1=3$ وي $B(x,y)$ ترلاسه کړی ؟

حل:

$$x-1=3 \Rightarrow x=4 \quad , \quad x+y=5 \Rightarrow y=5-x=5-4=1$$

$$B(4,1)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(1)}{\Gamma(5)}=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$$

تمرین

بیتا تابع لاندې مثالونو ته ترلاسه کړی ؟

$$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta \quad , \quad b.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta \quad , \quad c.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta$$

$$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta \quad , \quad e.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2n}d\theta \quad , \quad f.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3\theta\cos\theta}\,d\theta$$

$$g.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta \quad , \quad h.\ \int_0^{1}t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt \quad , \quad i.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$$

$$j.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta \quad , \quad k.\ \ x+y=6 \quad , \quad y-1=6$$

د بسل تابع $(Bessels\ Function)$

د بسل تفاضلي معادله په تطبیقي ریاضیاتو کې یوه له ډېرو مهمو تفاضلي معادلو څخه ده.

دغه معادله د لومړي ځل لپاره د یاکوب برنولي $(1656-1705)$ لخوا په کال 1703 کې د یوه ځوړند زنځیر د اهتزازي حرکت لپاره ترڅیړنې لاندې ونیول شوه، وروسته بیا د فریدریک ویلهلم بسل $(1846-1884)$ لخوا د ستورو د حرکت لپاره وکارول شوه، له هماغه وخت وروسته د بسل د معادلو، د بسل د توابعو د لړۍ په توګه د ارتجاع ورتیا، د مایعاتو حرکت، د پوتانسیل نظریه، د څپو خپریدل او داسې نورو مسئلو کې په لوړه پیمانه کارول کیده. په دغې بحث کې د بسل د تابع او معادلې له پیژندلو وروسته، دغه موضوع په ځانګړو تطبیقي بېلګو کې ترڅېړنې لاندې نیسو. او د اړونده ضریبونو ځانګړي حالات مطرح کوو، د بسل تفاضلي معادله لاندې شکل لري.

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \quad , \quad p\in IR \qquad (1)$$

دلته P ثابت عدد دی او دغې معادلې ته د بسل P ام مرتبه تفاضلي معادله وایي.

لومړۍ معادله د شکل د تغیر په صورت کې په لاندې ډول لیکلی شو:

$$x(xy')'+(x^2-p^2)y=0$$

نو د بسل تفاضلي معادلې د حل لپاره د یوې مرستندویې تابع: $y=x^c\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k , a_0\neq 0$ څخه استفاده کوو.

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+c) x^{k+c-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+c)(k+c-1) x^{k+c-2}$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0$$

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+c)(k+c-1)x^{k+c-2} + x\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+c)x^{k+c-1} + \left(x^2-p^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+c} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+c)(k+c-1)x^2x^{k+c-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+c)xx^{k+c-1} +$$

$$+\left(x^2-p^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+c} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+c)(k+c-1)x^{k+c} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+c)x^{k+c} + (x^2-p^2)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+c} = 0$$

$$x^c[\sum_{k=0}^{\infty} a_k\{(k+c)\left(k+c+1-1\right) - p^2\}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2}] = 0$$

$$x^c[\sum_{k=0}^{\infty} a_k\{(k+c)^2-p^2\}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k] = 0$$

$$x^c[\sum_{k=0}^{\infty} a_k\{(k+c)^2-p^2\} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}]x^k = 0$$

اوس که چېرې $k=0$ واچول شي، په دې صورت کې د ضریبونو لپاره لرو چې:

$$a_k\{(k+c)^2-p^2\} = a_0(c^2-p^2) = 0 => c^2-p^2 = 0 => c = \pm p$$

د $k=1$ لپاره لرو چې:

$$a_k[(k+c)^2-p^2] \Rightarrow a_1[(1+c)^2-p^2] = 0$$

$$a_1[(1+2c+c^2)-p^2] = 0$$

که $C=P$ واچول شي نو:

$$a_1(1+2p+p^2-p^2) = 0$$

$$a_1(1+2p) = 0 \qquad ,1+2p \neq 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0$$

د $k \geq 0$ لپاره لرو چې:

$$a_k[(k+p)^2-p^2] + a_{k-2} = 0$$

$$=> a_k = \frac{-a_{k-2}}{(k+p)^2-p^2} a_k[(k+p)^2-p^2] = -a_{k-2}$$

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{k^2+2kp} - \frac{a_{k-2}}{k(k+2p)}$$

له دې چې مخکې مو ترلاسه کړه چې $a_1 = 0$ ده له دې ځایه:

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2+2p)}$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3(3+2p)} = 0$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2p)} = \frac{a_0/2(2+2p)}{4(4+2p)} = \frac{a_0}{2(2+2p)}\frac{1}{4(4+2p)} = \frac{a_0}{2\cdot 4\left(2+2p\right)\left(4+2P\right)}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{5(5+2p)} = 0$$

له وروستۍ رابطې څخه لیدل کیږي چې $a_k = -\frac{1}{k(k+2p)} a_{k-2}$ او $a_1 = 0$ ته په کتو سره پایله ترلاسه کوو چې $a_1 = a_3 = ... = a_{2k+1} = 0 \quad , \quad k \ge 0$ بالاخره د $k = 2n$ لپاره لرو چې:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)(2+2P)(4+2P)(6+2P)\cdots(2k+2P)} \qquad ,k\ge 1$$

$$= \frac{(-1)^k a_0}{2^k(1\cdot 2\cdot 3\cdots k)\cdot 2(P+1)\cdot 2(P+2)\cdots 2(P+k)}$$

$$= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!\,(P+1)(P+2)\cdots(P+k)}$$

اوس د جفت قیمتونو ضریبونه په : $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+c}$ مرستندویه تابع کې اچوو؛ نو :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+c} \overset{c=p}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+p}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} x^p = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = x^p\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + a_0\right]$$

$$y = x^p\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0 x^{2k}}{2^{2k} k!(p+1)(p+2)(p+3)...(p+k)} + a_0\right]$$

پاسنۍ رابطې د بسل د تفاضلي معادلو یو حل دی، که: $a_0 = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ واچول شي بیا هم لرو چې:

$$y = J_{p(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+p} = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

$$J_{p(x)} = x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} 2^p k!(p+1)(p+2)...(p+k)\Gamma(p+1)}$$

$$J_{p(x)} = x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k! 2^{2k+p}\Gamma(k+p+1)}$$

$$J_{p(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}, c = p$$

$$J_{-p(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}, c = -p$$

$J_{p(x)}$ او $J_{-p(x)}$ د بسل تفاضلي معادلې نور حلونه دي او د لومړۍ ډلې څخه د (P) ترتیب او د دویم ډلې څخه د $(-P)$ ترتیب په نامه یادیږي.

اوس که $P = 0$ وضع شي ترلاسه کیږي چې:

$$J_{0(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

د $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0$ تفاضلي معادلې عمومي حل د: $p \neq 1, 2, 3, ..., \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, ...$ قیمتونو لپاره په $(-\infty, \infty)$ ساحه کې عبارت دی له: $y = Ay_1 + By_2$ او یا $y = AJ_{P(x)} + BJ_{P(x)}$ څخه پاسنۍ روابط، P ترتیب لرونکي دویم ډوله د بسل تابع په نامه یادیږي.

اوس د $J_{p(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$ تابع په مرسته ښیو چې پاسنۍ تابع متقاربه ده.

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}(\frac{x}{2})^{2(k+1)+p}}{(k+1)!\,\Gamma(p+k+2)}\,\frac{k!\,\Gamma(p+k+1)}{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k+p}}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2}{(k+1)(p+k+1)2^2}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2}{(k+1)(k+p+1)2^2}\right| = 0<1$$

پاسینی $J_{p(x)}$ تابع د $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ تفاضلي معادلې په حل کې مرسته کوي، که په $x=0$ قیمت کې یې حل معین وي، نو د P ترتیب لرونکي لومړی ډوله بسل تابع په نامه یادیږي او که په $x=0$ که ځانګړي نشي نو P ترتیب لرونکي دویم ډوله بسل تابع نومیږي.

مثال: که $p=\pm 3$ وي وښیی چې $J_{-3}(x)=-J_3(x)$ ده ؟

حل : پوهیږو چې : $J_{p(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)}(\frac{x}{2})^{2k+p}$ ده، په دې اساس :

$$J_{3(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+4)}(\frac{x}{2})^{2k+3}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(4)}(\frac{x}{2})^3-\frac{1}{1!\Gamma(5)}(\frac{x}{2})^5+\frac{1}{2!\Gamma(6)}(\frac{x}{2})^7-\dots$$

$$=\frac{1}{3!\Gamma(1)}(\frac{x}{2})^3-\frac{1}{4!\Gamma(2)}(\frac{x}{2})^5+\frac{1}{5!\Gamma(3)}(\frac{x}{2})^7-\dots$$

$$J_{-3(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-3)}(\frac{x}{2})^{2k-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-2)}(\frac{x}{2})^{2k-3}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-2)}(\frac{x}{2})^{-3}-\frac{1}{1!\Gamma(-1)}(\frac{x}{2})^{-1}+\frac{1}{2!\Gamma(0)}(\frac{x}{2})-\frac{1}{3!\Gamma(1)}(\frac{x}{2})^3+\dots$$

$$=-\frac{1}{3!\Gamma(1)}(\frac{x}{2})^3+\frac{1}{4!\Gamma(2)}(\frac{x}{2})^5-\frac{1}{5!\Gamma(3)}(\frac{x}{2})^7-\dots$$

$$=-\left[\frac{1}{3!\Gamma(1)}(\frac{x}{2})^3-\frac{1}{4!\Gamma(2)}(\frac{x}{2})^5+\frac{1}{5!\Gamma(3)}(\frac{x}{2})^7+\dots\right]=-J_3(x)$$

$$\Rightarrow J_{-3}(x)=-J_3(x)\quad\bullet$$

مثال: وښیی چې : $\frac{d}{dx}(x^pJ_p(x))=x^pJ_{p-1}(x)$ ده ؟

حل : پوهیږو چې :

$$\frac{d}{dx}(x^pJ_p(x))=\frac{d}{dx}\left[x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)}(\frac{x}{2})^{2k+p}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^p}{k!\,\Gamma(k+p+1)}(\frac{x}{2})^{2k+2p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^p\cdot 2(k+p)}{k!\,\Gamma(k+p+1)\cdot 2}(\frac{x}{2})^{2k+2p-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^p\cdot 2(k+p)\cdot x^p}{k!(k+p)\Gamma(k+p)\cdot 2\cdot 2^p}(\frac{x}{2})^{2k+p-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^p}{k!\,\Gamma(k+p)}(\frac{x}{2})^{2k+p-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^p}{k!\,\Gamma(k+p-1+1)}(\frac{x}{2})^{2k+p-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^p}{k!\,\Gamma(k+1+(p-1))}(\frac{x}{2})^{2k+p-1}=x^pJ_{p-1}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^pJ_P(x))=x^pJ_{p-1}(x)\ \bullet$$

مثال: ثبوت کړی چې: $J'_P(x) = J_{P-1}(x) - \dfrac{p}{x}J_P(x)$ ده ؟

حل:

$$\frac{d}{dx}(x^p J_P(x)) = px^{p-1}J_p(x) + x^p J'_P(x) = x^p J_{P-1}(x)$$

$$\therefore x^p J'(x) = x^p J_{p-1}(x) - px^{p-1}J_p(x)$$

$$J'(x) = \frac{x^p J_{p-1}(x)}{x^p} - \frac{px^{p-1}J_p(x)}{x^p}$$

$$\therefore J'(x) = J_{p-1}(x) - px^{p-1}\cdot x^{-p}J_P(x)$$

$$J_{p-1}(x) - px^{-1}J_p(x) = J_{P-1}(x) - \frac{p}{x}J_P(x)$$

$$\Rightarrow J'_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x}J_p(x) \bullet$$

مثال: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$ وښيئ ؟

حل: د $\sin x$ تابع لپاره د تايلور لړۍ عبارت ده له:

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n, x_0 = 0$$

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$J_{\frac{1}{2}}(x)$ تابع په لاندې ډول ترلاسه کوو.

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{3}{2})}(\frac{x}{2})^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})}(\frac{x}{2})^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2!\Gamma(\frac{7}{2})}(\frac{x}{2})^{\frac{9}{2}} - \cdots$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left[2(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(\frac{x}{2})^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{2\cdot3\cdot5}(\frac{x}{2})^{\frac{9}{2}} - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}}}\left[x - \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}}\sin x \quad \bullet$$

مثال: وښيئ چې: $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right) = -x^{-p}J_{p+1}(x)$ ده ؟

حل:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right) = -px^{-p-1}J_p(x) + x^{-p}J'_p(x) = -x^{-p}J_{p+1}(x)$$

$$\Rightarrow -px^{-p-1}J_p(x) + x^{-p}J'_p(x) = -x^{-p}J_{p+1}(x)$$

$$x^{-p}J'_p(x) = -x^{-p}J_{p+1}(x) + px^{-p-1}J_p(x)$$

$$J'_p(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x}J_p(x)$$

$$-px^{-p-1}J_p(x)+x^{-p}J'_p(x)\overset{?}{=}-x^{-p}J_{p+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right)=-pJ_p(x)x^{-p-1}+x^{-p}\left(-J_{p+1}(x)\right)+x^{-p}\frac{p}{x}J_p(x)$$

$$=-pJ_p(x)x^{-p-1}-x^{-p}J_{p+1}(x)+px^{-p-1}J_p(x)=-x^{-p}J_{p+1}(x)$$

$$=>\frac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right)=-x^{-p}J_{p+1}(x)$$

مثال: لاندې رابطه وخیړی ؟ $J'_P(x)=\frac{1}{2}(J_{p-1}(x)-J_{p+1}(x))$

حل :

$$J'_p(x)=J_{p-1}(x)-\frac{P}{x}J_p(x) \qquad (1)$$

$$J'_p(x)=-J_{p+1}(x)+\frac{P}{x}J_p(x) \qquad (2)$$

اوس د (1) او (2) رابطو دواړې خواوې طرف په طرف جمع کوو نو :

$$J'_p(x)=J_{p-1}(x)-\frac{P}{x}J_p(x) \qquad (1)$$

$$J'_p(x)=-J_{p+1}(x)+\frac{P}{x}J_p(x) \qquad (2)$$

$$2J'_p(x)=J_{P-1}(x)-J_{P+1}(x)$$

$$\Rightarrow J'_p(x)=\frac{1}{2}(J_{P-1}(x)-J_{p+1}(x))\bullet$$

مثال: ثبوت کړی چې : $J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)-J_{p-1}(x)$

حل :

$$J'_p(x)=J_{p-1}(x)-\frac{P}{x}J_p(x)......(1)$$

$$J'_p(x)=-J_{p+1}(x)+\frac{P}{x}J_p(x).....(2)$$

اوس (1) او (2) رابطه طرف په طرف منفي کوو ؛ نو :

$$0=-J_{p+1}(x)-J_{p-1}(x)+\frac{2p}{x}J_p(x)$$

$$J_{p-1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)-J_{p+1}(x) \quad , \quad J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)-J_{p-1}(x)$$

$J_{p-1}(x)$ او $J_{p+1}(x)$ فورمولونه د بسل د تابع د جمع او تفریق د حاصل لپاره خورا زیات کاریږي.

تمرین

1. $J_{\frac{-1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{x\pi}}\cos x$

2. $J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{x\pi}}\left(\dfrac{\sin x}{x}-\cos x\right)$

3. $J_{\frac{-3}{2}}(x)=-\sqrt{\dfrac{2}{x\pi}}\left(\dfrac{\cos x}{x}+\sin x\right)$

4. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\dfrac{25}{4}\right)y=0 \quad , \quad p=\pm\dfrac{5}{2}$

5. $\dfrac{d}{dx}\left(\lambda J_p(\lambda x)\right)\overset{?}{=}\lambda^2 J_{p-1}(\lambda x)-\dfrac{\lambda\, p}{x}J_p(\lambda x)$

ځانګړي حالتونه

په $P=0$ کې صفر مرتبه د بسل تابع ترلاسه کیږي.

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n}=1-(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{(2!)^2}(\frac{x}{2})^4-\frac{1}{(3!)^3}(\frac{x}{2})^6+\dots$$

د $P=1$ لپاره لومړۍ مرتبه د بسل تابع لرو :

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}(\frac{x}{2})^{2n+1}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}(\frac{x}{2})^3+\frac{1}{2!\cdot 3!}(\frac{x}{2})^5-\frac{1}{3!\cdot 4!}(\frac{x}{2})^7\cdots$$

د بسل په تابع کې $J_0(x)$ او $J_1(x)$ په لوړه پیمانه کاریږي چې $J_0(x)$ جفت تابع او $J_1(x)$ تاق تابع ده.

مثال: $J_3(x)$ تابع د $J_0(x)$ او $J_1(x)$ له جنسه ترلاسه کړئ ؟

حل : پوهیږو چې $J_{p+1}(x)=-J_{p-1}(x)+\dfrac{2p}{x}J_p(x)$ ده.

او س یې ثبوت کوو.

$$J_3(x)=J_{2+1}(x)=\frac{2\cdot 2}{x}J_2(x)-J_{2-1}(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x)$$

$$J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x)$$

له دې چې $J_2(x)=J_{1+1}(x)-\dfrac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$ ده، په دې اساس :

$$J_3(x)=\frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x))-J_1(x)$$

$$=\frac{8}{x^2}J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x)-J_1(x)$$

$$\Rightarrow J_3(x)=(\frac{8}{x^2}-1)J_1(x)-\frac{4}{x}J_0(x)$$

مثال: د بسل $J_5(x)$ تابع د $J_0(x)$ او $J_1(x)$ له جنسه ترلاسه کړئ؟

حل: پوهیږو چې: $J_{p+1}(x)=-J_{p-1}(x)+\frac{2p}{x}J_p(x)$ ده.

په دې اساس:

$$J_5(x)=J_{4+1}(x)=-J_{4-1}(x)+\frac{2\cdot 4}{x}J_4(x)=-J_3(x)+\frac{8}{x}J_4(x)$$

اوس باید په پاسیني رابطه کې $J_2(x), J_3(x), J_4(x)$ د $J_0(x)$ او $J_1(x)$ له جنسه ترلاسه کړو، بیا یې بېرته په پاسیني رابطه کې واچوو ترڅو $J_5(x)$ د $J_0(x)$ او $J_1(x)$ له جنسه پیدا شي.

$$J_2(x)=-J_0(x)+\frac{2}{x}J_1(x)\cdots\cdots(1)$$

$$J_2(x)=J_{1+1}(x)=-J_{1-1}(x)+\frac{2\cdot 1}{x}J_1(x)=-J_0(x)+\frac{2}{x}J_1(x)$$

$$J_{2+1}(x)=-J_{2-1}(x)+\frac{2\cdot 2}{x}J_2(x)=-J_1(x)+\frac{4}{x}J_2(x)$$

$$J_3(x)=-J_1(x)+\frac{4}{x}(-J_0(x)+\frac{2}{x}J_1(x))$$

اوس $J_4(x)$ ترلاسه کوو:

$$J_4(x)=J_{3+1}(x)=-J_{3-1}(x)+\frac{2\cdot 3}{x}J_3(x)=-J_2(x)+\frac{6}{x}J_3(x)$$

$$=-(-J_0(x)+\frac{2}{x}J_1(x))+\frac{6}{x}(J_1(x)((\frac{8}{x^2}-1)-\frac{4}{x}J_0(x))$$

$$=J_0(x)-\frac{2}{x}J_1(x)+\frac{48}{x^3}J_1(x)-\frac{6}{x}(J_1(x)-\frac{24}{x^2}J_0(x)$$

$$=(1-\frac{24}{x^2})J_0(x)+(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x})J_1(x)\cdots\cdots\cdots(3)$$

اوس (1),(2) او (3) رابطې په $J_5(x)$ کې اچوو:

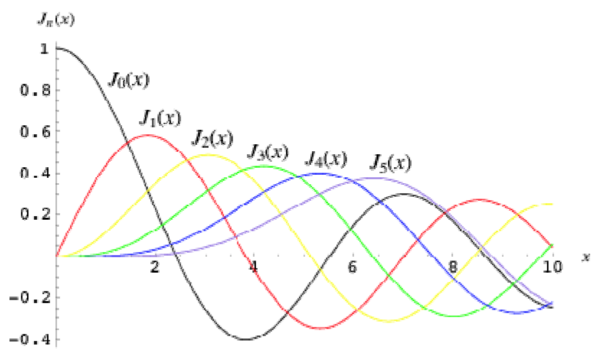
$$J_5(x)=J_{4+1}(x)=-J_3(x)+\frac{8}{x}J_4(x)$$

$$=-[J_1(x)(\frac{8}{x^2}-1)-\frac{4}{x}J_0(x)]+\frac{8}{x}[(1-\frac{24}{x^2})J_0(x)+(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x})J_0(x)$$

$$=-\frac{8}{x^2}J_1(x)+J_1(x)+\frac{4}{x}J_0(x)+\frac{8}{x}J_0(x)-\frac{192}{x^3}J_0(x)+J_1(x)\frac{384}{x^4}-\frac{64}{x^2}J_1(x)$$

$$J_5(x)=(1-\frac{72}{x^2}+\frac{384}{x^4})J_1(x)+(\frac{12}{x}-\frac{192}{x^3})J_0(x)$$

د بسل تابع ګراف په خو تامو قیمتونو کې:



تمرین

1. $\frac{d}{dx}\left(J_0(x)\right) = -J_1(x)$

2. $\int J_1(x)dx = -J_0(x) + C$

3. $\frac{d}{dx}\left(J_1(x)\right) \overset{?!}{=} J_0(x) - J_2(x)$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{J_1(x)}{x} = ?$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{J_1(x)}{x} = ?$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{J_0(x)}{x} = ?$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{J_0(x)}{x} = ?$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{J_0(x)} = ?$

د لژاندر تابع $(Legendrs\ Function)$

د لژاندر تفاضلي معادله په تطبیقي ریاضیاتو کې ترحد زیات کاریږي، چې د آدرین ماري لژاندر $(1752-1833)$ لخوا ترڅیړنې لاندې ونیول شوه.

نو څکه د $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ تفاضلي معادلې سره چې P پکې یو حقیقي عدد دی، د لژاندر نوم نښتی.

ټولې هغه تابع ګانې چې په دغه تفاضلي معادله کې صدق کوي د لژاندر P مرتبه تابع ګانو په نامه یادیږي، دغه معادله په کروي مختصاتو کې د قسمي مشتق لرونکو تفاضلي معادلو په حل کې، کوانتوم میخانیک کې، الکترومقناطیس نظریه کې، تودوخه او داسې نورو ځایونو کې کارول کیږي.

ځینې وخت ددغې معادلې حلونه د ډېر ګڼور پولینومونه تشکیلوي او غواړو چې دغه ګڼور پولینومونه ثبوت کړو. د لژاندر تفاضلي معادلې د حل لپاره کټ مټ د بسل تفاضلي معادلې په څیر عمل کوو.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha-k}, a_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha-k) x^{\alpha-k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha-k)(\alpha-k-1) x^{\alpha-k-2}$$

اوس د y'', y', y قیمتونه د لژاندر په تفاضلي معادله کې اچوو:

$$\left(1-x^2\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha-k)(\alpha-k-1) x^{\alpha-k-2}\right] - 2x\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha-k) x^{\alpha-k-1}\right] +$$

$$+ p(p+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha-k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha-k)(\alpha-k-1)x^{\alpha-k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha-k)(\alpha-k-1)x^{\alpha-k} -$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha-k)x^{\alpha-k} + p(p+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha-k} = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)x^{\alpha-k} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha-k)[(\alpha-k-1+2)]x^{\alpha-k} + p(p+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha-k} = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)a_{k-2}+(p(p+1)-(\alpha-k)(\alpha-k+1))a_k]x^{\alpha-k}$$

$$-a_0(\alpha(\alpha+1))x^{\alpha}-a_1(\alpha(\alpha-1))x^{\alpha-1}+p(p+1)a_0x^{\alpha}+p(p+1)a_1x^{\alpha-1}=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)a_{k-2}+(p(p+1)-(\alpha-k)(\alpha-k+1))a_k]x^{\alpha-k}+$$

$$+(p(p+1)-\alpha(\alpha+1))a_0x^{\alpha}(p(p+1)-\alpha(\alpha-1))a_1x^{\alpha-1}=0$$

1. $a_0[(p+1)p-\alpha(\alpha+1)]=0$
2. $a_1[(p+1)p-\alpha(\alpha-1)]=0$
3. $(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)a_{k-2}+[p(p+1)-(\alpha-k)(\alpha-k+1)a_k]=0$

$$a_0(p^2+p-\alpha^2-\alpha)=a_0(p^2+p+\alpha p-\alpha p-\alpha^2-\alpha)=0, a_0\neq 0$$

$$p(p+\alpha+1)-\alpha(p+\alpha+1)=(p-\alpha)(p+\alpha+1)=0$$

$$p-\alpha=0\Rightarrow\alpha=p \quad , \quad p+\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=-(p+1)$$

ترټولو دمخه په (2) شمېره کې $\alpha = p$ اچوو ترڅو a_1 پيداکړو.

$$a_1(p^2+p-\alpha^2+\alpha)=a_1(p^2+p-p^2+p)=2pa_1=0, 2p\neq 0 , a_1=0$$

اوس له (3) شمېرې څخه د a_k قيمت ترلاسه کوو.

$$(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)a_{k-2}+[p(p+1)-(\alpha-k)(\alpha-k+1)a_k]=0$$

$$[p(p+1)-(\alpha-k)(\alpha-k+1)]a_k=-[(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)]a_{k-2}$$

$$p=\alpha\Rightarrow[p(p+1)-(p-k)(\alpha-k+1)]a_k=-[(p-k+2)(p-k+1)]a_{k-2}$$

$$a_k=\frac{-[(p-k+2)(p-k+1)]a_{k-2}}{p(p+1)-(p-k)(\alpha-k+1)}=-\frac{(p-k+2)(p-k+1)}{k(2p-k+1)}a_{k-2}$$

د $k=2$ لپاره لرو چې: $a_2=-\frac{p(p-1)}{2(2p-1)}a_0$ ده.

$$k=4\Rightarrow a_4=-\frac{(p-2)(p-3)}{4(2p-3)}a_2=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4(2p-1)(2p-3)}a_0$$

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha-k}\overset{\alpha=p}{=}x^p\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-k}=x^p\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{-2k}=x^p(a_0+a_2x^{-2}+a_4x^{-4}+\cdots)$$

$$y_1=x^p\left[a_0-\frac{p(p-1)}{2(2p-1)}a_0x^{-2}+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4(2p-1)(2p-3)}a_0x^{-4}-\ldots\right]$$

د لژاندر تفاضلي معادلې يو حل دی.

د $\alpha = p$ لپاره مو ضريبونه وشمېرل همدې ته ورته اوس $\alpha=-(p+1)$ هم ترلاسه کوو يعنې:

$$y_2=x^{-p-1}\left[a_0+\frac{(p+1)(p+2)}{2(2p+3)}a_0x^{-2}+\frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4(2p+3)(2p+5)}a_0x^{-4}+\ldots\right]$$

y_1 او y_2 د لژاندر تفاضلي معادلې خپلواک حلونه دي خو عمومي حل يې عبارت دی له: $y=Ay_1+By_2$.

$$y_1=a_0x^p+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kp(p-1)(p-2)\cdots(p-2k)(p-(2k-1))}{2\cdot 4\cdots 2k(2p-1)(2p-3)\cdots(2p-(2k-1))}a_0x^{p-2k}$$

$$y_2=a_0x^{-p-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+(2k-1))(p+2k)}{2\cdot 4\cdots 2k(2p+3)(2p+5)\cdots(2p+2k+1)}a_0x^{-p-1-2k}$$

که چیرې $p=n>0$ او $a_0=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ واچول شي نو :

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-2k)(n-2k+1)}{2\cdot4\cdots2k(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1)}x^{n-2k}\right]$$

$P_n(x)$ تابع ته (n) ترتیب لرونکی لومړی ډوله د لژاندر پولینوم وایي.

که $P=n>0$ وي او $a_0=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ واړول شي، ترلاسه کوو :

$$Q_n(x)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\left[x^{-p-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+2k-1)(n+2k)}{2\cdot4\cdots2k(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2k+1)}x^{-n-1-2k}\right]$$

$Q_n(x)$ تابع ته n ترتیب لرونکی دویم ډوله د لژاندر پولینوم وایي.

قضیه

د لژاندر له پولینوم څخه د رودریکس $P_n(x)=\frac{1}{2^n(n!)}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ فورمول پیدا کولی شو ؟

ثبوت : د بینوم فورمول داسې ښودل کیږي.

$$(x\pm y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\pm y)^k$$

نو له فورمول څخه لیکلی شو :

$$(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}x^{2n-2k}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=x^{2n}-nx^{2n-2}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{2n-4}-\cdots+(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{2n-2r}+\cdots$$

له $(x^2-1)^n$ دوه حدي څخه $(r+1)$ ام حد له u سره مساوي وضع کوو، په دې صورت کې لرو چې :

$$u=(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{2n-2r}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{2n-2r}\right]=(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}(2n-2r)x^{2n-2r-1}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}(2n-2r)(2n-2r-1)x^{2n-2r-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nu}{dx^n}=(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}(2n-2r)(2n-2r-1)\cdots(2n-2r-(n-1))x^{2n-2r-n}$$

$$=(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}(2n-2r)(2n-2r-1)\cdots(2n-2r-n+1)x^{n-2r}$$

$$=(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}(2n-2r)(2n-2r-1)\cdots(n-2r+1)x^{n-2r}$$

$$=(-1)^r\frac{n!(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$$

په دې اساس له $P_n(x)$ څخه $(r+1)$ ام حد عبارت دی له :

$$P_n(x)=(-1)^r\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2r)(n-2r+1)}{2\cdot4\ldots2r(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)}x^{n-2r}$$

$$=(-1)^r\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2r)(n-2r+1)(n-2r)!}{2\cdot4\ldots2r(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)(n-2r)!}x^{n-2r}$$

$$=(-1)^r\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{n!}{2^r r!(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2r+1)(n-2r)!}x^{n-2r}$$

$$=(-1)^r\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\frac{n!(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2(r-1))(2n-2r)!}{2^r r!(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots(2n-2r+2)(2n-2r+1)(2n-2r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$$

$$= \frac{(-1)^r(2n)!}{2^n(n!)} \frac{(2n-2)(2n-4)\dots(2n-2r+2)(2n-2r)!\,x^{n-2r}}{2^r r!(2n-1)!(n-2r)!}$$

$$= \frac{(-1)^r(2n)!}{2^n(n!)} \frac{2(n-1)2(n-2)\dots2(n-(r-1))(2n-2r)!\,x^{n-2r}}{2^r r!(2n-1)!(n-2r)!}$$

$$= \frac{(-1)^r(2n)!}{2^n(n!)} \frac{2^{r-1}(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!(2n-2r)!\,x^{n-2r}}{2^r r!(2n-1)!(n-2r)!(n-r)!}$$

$$= \frac{(-1)^r 2n(2n-1)!}{2^n n(n-1)!} \frac{2^{r-1}(n-1)!(2n-2r)!\,x^{n-2r}}{2^r r!(2n-1)!(n-2r)!(n-r)!}$$

$$= \frac{(-1)^r}{2^n}\frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r} = \frac{(-1)^r}{2^n n!}\frac{(2n-2r)!n!}{r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$=> P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad \bullet$$

مثال: $P_n(x)=P_3(x)$ د رودريکس د فورمول په مرسته وشمېرئ ؟

حل :

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad , \quad n=3$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d}{dx}(x^2-1)^3\right] = \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}\left[6x(x^2-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(6x(x^2-1)^2\right)\right] = \frac{1}{48}\frac{d}{dx}\left[6(x^2-1)^2+24x^2(x^2-1)\right]$$

$$= \frac{1}{48}\left[24x(x^2-1)+48x(x^2-1)+48x^3\right] = \frac{1}{48}\left[120x^3-72x\right] = \frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

قضيه

ثبـــوت کـــړئ، کـــه چېـــرې $\int_{-1}^{1}P^2{}_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}$ وي نـــو $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$ کيږي.

ثبوت : $f(x)$ تابع داسې په پام کې نيسو :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} C_kP_k(x) = C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)+\cdots$$

$$P_n(x)f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} C_kP_k(x)P_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{\infty} C_kP_n(x)P_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1} C_kP_n(x)P_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\int_{-1}^{1}P_k(x)P_n(x)dx$$

$$=C_n\int_{-1}^{1}P^2{}_n(x)dx = C_n\frac{2}{2n+1} \Rightarrow C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)f(x)dx$$

مثال: د $f(x)=x^3$ تابع درې لومړي حدونه د $P_n(x)$ تابع له جنسه داسې ترلاسه کړئ چې : $(n=0,1,2,\cdots)$ وي ؟

حل :

$$f(x)=x^3 = C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad , \quad P_0(x)=\frac{1}{0!}\frac{d^{(0)}}{dx^{(0)}}(x^2-1)^0=1$$

$$P_1(x)=\frac{1}{21!}\frac{d}{dx}(x^2-1)^2 = x \quad , \quad P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)f(x)dx = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}x^3P_n(x)dx$$

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^3P_0(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{1}{2}\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^3P_1(x)dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^3xdx=\frac{3}{2}\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}=\frac{3}{5}$$

$$C_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^3P_1(x)dx=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^3\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^5-\frac{1}{2}x^3\right)dx=0$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3\approx C_0P_0(x)+C_1P_1(x)+C_2P_2(x)\approx\frac{3}{5}x$$

تمرين

1. $f(x)=x^4$ تابع د $P_n(x)$ تابع له جنسه $n=3$ لپاره ترلاسه کړی او ويې شميرۍ ؟

2. د $f(x)=e^x$ تابع درې حدونو ته د $P_n(x)$ تابع له جنسه انکشاف ورکړۍ ؟

3. د رودريکس د فورمول په مرسته وښيئ چې $P_1(x)=P_2(x)=P_3(x)$ داسې چې $x=1$ وي ؟

4. $f(x)=a^x$ تابع ته د $P_n(x)$ تابع له جنسه انکشاف ورکړۍ ؟

5. د $f(x)=\ln x$ تابع دوو حدونو ته د $P_n(x)$ تابع له جنسه انکشاف ورکړۍ ؟

د استرلینګ فورمول

$n!$ یا $\Gamma(x)$ فورمولونه د انتیګرال او مشتق عملیو لپاره مناسب نه دي، خو یو تقریبي فورمول د فکتوریل یا ګاما تابع لپاره شته چې د استرلینګ فورمول په نامه یادیږي او دغه فورمول د غټو اعدادو فکتوریل لرونکو فورمولونو د ساده کولو لپاره کاریږي ؟

$$n!= n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi} \quad \vee \quad \Gamma(p+1)= p^p e^{-p}\sqrt{2p\pi} \qquad \cdots(1)$$

د لومړۍ رابطې د ثبوت لپاره پوهیږو چې :

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{\ln x^n}e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{n\ln x}e^{-x}dx$$

لاندې تعویض په پام کې نیسو :

$$*\left(x=n+y\Rightarrow dx=dy \quad , \quad x\to\infty\Rightarrow y\to\infty \,,\, x\to 0\Rightarrow y\to -n\right)$$

$$n!=\Gamma(n+1)\overset{*}{=}\int_{-n}^\infty e^{n\ln(n+y)-n-y}dy=e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln(n+y)-y}dy$$

د اویلر عدد په توان کې د تغیر راوستو وروسته لاندې انتیګرال لیکلی شو :

$$n[\ln(n+y)]=n\left\{\ln\left[n\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]\right\}=n\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]=n\ln n+n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)$$

$$n!=e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln(n+y)-y}dy=e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln n+n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}dy=e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln n}e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}dy$$

$$=e^{-n}e^{\ln n^n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln n}e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}dy=e^{-n}n^n\int_{-n}^\infty e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}dy$$

د تایلور د لړۍ په مرسته لوګاریتمي توابع داسې لیکلی شو :

$$\therefore\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

که $x=\frac{y}{n}$ واچول شي لرو چې :

$$\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)=\frac{y}{n}-\frac{\left(\frac{y}{n}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{y}{n}\right)^3}{3}-\cdots=\frac{y}{n}-\frac{y^2}{2n^2}+\frac{y^3}{3n^3}-\cdots$$

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)-y=n\left[\frac{y}{n}-\frac{y^2}{2n^2}+\frac{y^3}{3n^3}-\cdots\right]-y=y-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}-\cdots-y=-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}-\cdots$$

نو :

$$n!=n^n e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}-\cdots}dy$$

که $y=t\sqrt{n}$ واچول شي ترلاسه کوو چې :

$$\bullet\left(y=t\sqrt{n}\Rightarrow dy=\sqrt{n}\cdot dt \quad , \quad y\to\infty\Rightarrow t\to\infty \,,\, y\to -n\Rightarrow t\to -\sqrt{n}\right)$$

او هم :

$$-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{2n^2}-\cdots=-\frac{(t\sqrt{n})^2}{2n}+\frac{(t\sqrt{n})^3}{3n^2}-\cdots=-\frac{nt^2}{2n}+\frac{t^3n^{\frac{3}{2}}}{3n^2}-\cdots=-\frac{t^2}{2n}+\frac{t^3}{3\sqrt{n}}-\cdots$$

که n ډېر، ډېر غټ شي نو :

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt=n^n e^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow n!=n^n e^{-n}\sqrt{n}\sqrt{2\pi}$$

پاسیني فورمول د استرلینګ فورمول دی چې ثبوت شو.

د تېروتنې (خطا) تابع

$y=e^{-t^2}$ منحنــي داسـې ښـيي $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ چې د تېروتنــې (خطا) تابع یا $erf(x)$ په نامه یادیږي. که $x\to\infty$ نو؛ د تېروتنې (خطا) تـابع د لړیو په مرسته داسې هم ارزول کیږي.

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\left(1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\cdots\right)dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\cdots\right)$$

د هرمیت تابع

د هرمیت تفاضلي معادله عبارت ده له:

$$y_n''-x^2y_n=-(2n+1)y_n \quad , \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

هرمیت تابع په ساده ډول هم لیکلی شو:

$$y_n=e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

کـه (1) رابطه لـه $(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}$ سره ضرب کړو د هرمیـت پولینـوم لاس تـه راځي.

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

$H_n(x)$ ته د هرمیت پولینوم لپاره د رودریکس فورمول وایي.

که د هرمیـت پولینـوم پـه اړونـده تفاضـلي معادلـه کې یې تطبیـق کړو د هرمیت معادله $y''-2xy'+2ny=0$ ترلاسه کیږي.

د هرمیت پولینومونه په $(-\infty,\infty)$ انتروال کې د وزن په تـابع e^{-x^2} عمـود دي.

د لاګر توابع

د لاګر پولینوم د رودریکس پولینوم په مرسته تعریفیږي:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n-e^{-x}\right)$$

وروسته له مشتق نیولو څخه ترلاسه کوو چې:

$$L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{x^m}{m!}$$

دلتـه $L_n(x)$ د لاګر پولینوم دی، د لاګر پولینوم پـه $(0,\infty)$ انتـروال کې نسبت د وزن تابع e^{-x^2} ته عمود دی.

دویم څپرکی

قسمي تفاضلي معادلې او ډولونه یې

سریزه

تفاضلي معادلې د ریاضي خصوصاً د ریاضي د انالیز یو جلا، مهم او اساسي فصل جوړوي تفاضلي معادلې د تودوخې په خپریدو کې، د رادیواکتیف موادو تجزیه کې، د څپو په څیړلو او داسې نورو مسایلو کې مرکزي رول لري که چیرې د یوې تابع او یوه متحول ترمنځ اړیکه غوښتل شوې وي او یا د یوې تابع او څو متحولینو سره له اړونده مشتقونو یې اړیکه غوښتل شوې وي نو دغه او دې ورته ټول مباحث د تفاضلي معادلو په لمن کې حل کیږي، سربېره پردې که اړونده تابع یوازې یو متحول ولري، په دې حالت کې مشتق نظر یوه متحول ته راڅرګندیږي، نو منځ ته راغلې معادله معمولي تفاضلي معادله نومیږي، مثلاً معمولي تفاضلي معادله په لاندې ډول لیکلی شو.

$$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \quad \vee \quad F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

په پاسینۍ رابطه کې x خپلواک متحول، y غوښتل شوې تابع او $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ د $y=f(x)$ تابع مشتقونه دي، د پاسینۍ معادلې حل عبارت دی له: $y=F(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ هغه پارامترونه دي چې معینو قیمتونو ته د یادې معادلې خصوصي حل کیږي.

که چیرې تابع څو متحوله وي، قسمي مشتقونه په معادله کې راپیدا کیږي چې دې ډول معادلو ته بیا قسمي تفاضلي معادلې وایي.

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ خپلواک متحولین دي، u غوښتل شوې تابع ده چې عمومي حل یې عبارت دی له: $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړی؟ $\frac{\partial z}{\partial x}=1$

حل: $\frac{\partial z}{\partial x}=1 \Rightarrow dz=dx \Rightarrow z=x+\varphi(y)$

مثال: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$

حل:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=6y \Rightarrow \partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=6y\,dy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+\varphi_1(x)$$

$$dz=\left(3y^2+\varphi_1(x)\right)dy \Rightarrow z(x,y)=y^3+y\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$$

د سرحدي او لومړنيو شرايطو مسايل

دلته معمولاً درې ډوله مسالې تربحث لاندې نيسو ، چې دغه مسايل په فزيک او نورو ډېرو پوهو کې ډيرې د استعمال ساحې لري او هر يوه مساله په خپلو تحصيلي مقطعو کې يو خاص ډول ځانته راښکون لري دغه مسايل چې دوه مرتبه دي په لاندې ډول دي :

1. د څپو مساله چې د هايپرابول له ډولونو څخه ده.
2. د تودوخې مساله چې د پارابول له ډولونو څخه ده.
3. د لاپلاس مساله چې د اليپتيک له ډولونو څخه ده.

په (1) او (2) شمېرو کې وخت د يوه متحول په توګه حسابيږي او په حل کې يې لومړني شرايط شامل دي، په درې واړو معادلو کې طولي بدلون، عرضي بدلونونه (د سور بدلون) او ارتفاع نظر وخت ته خپلواک متحولين په پام کې نيول کيږي او سرحدي شرايط ددې معادلو په حل کې ضروري او مهم دي (قسمي مشتقونه د قطعه خط په پای کې، يا د يوې دوه بعدي ناحيې د اضلاعو پرمخ او يا د يوې درې بعدي ناحيې پرمخ).

(1) او (2) مساله په يو بعدي او درې بعدي ډلبنديو کې ځای لري خو (3) مساله په دوه بعدي او درې بعدي ډلبندۍ کې ځای لري.

مخکې له دې چې له پاس ياد شوو دريو معادلو څخه يوه حل کړو بايد د سرحدي او لومړينې مسالو شرايط تعريف کړو.

تعريف (د لومړنيو شرايطو مساله)

کله چې يوه تفاضلي معادله (معمولي يا قسمي) له لومړنيو شرايطو (د تابع لومړني شرايط، د لومړي او دويم مشتق لومړني شرايط او دې ته ورته نور) سره يوځای وي دې ته د يوې مسالې لومړني شرايط وايي.

مثال: $x'' + g\sin\frac{x}{l} = 0$ دويم مرتبه غيرخطي تفاضلي معادله چې x پکې د يوه متحرک پواسطه وهل شوې واټن دی، البته له دوو لومړنيو شرطونو سره هغه دا چې $x(0) = x_0$ (وهل شوې واټن په پيل کې) او $v(0) = v_0$ (لومړنی سرعت) يوه د لومړني شرط مساله ده.

تعريف (د سرحدي شرايطو مساله)

يوه تفاضلي معادله (معمولي يا قسمي) کله چې له يو شمېر سرحدي شرايطو سره يوځای وي دې ته د يوې مسالې سرحدي شرايط وايي.

مثال: $y'' + ay' + \beta y = 0$ دويم مرتبه تفاضلي معادله (α او β په يوه متحول پورې تړلي دي) چې په $[a,b]$ واټن کې تعريف شوې ده، له دوو $y(a)$ او $y(b)$ سرحدي شرطونو سره يو د سرحدي شرايطو مساله ده.

تعريف (د انجامي (پای) شرايطو مساله)

يوه تفاضلي معادله (معمولي يا قسمي) د لومړنيو او سرحدي شرايطو سره يوځای د انجامي شرايطو مساله نوميږي.

د دویم مرتبه تفاضلي معادلو تصنیف

د دویم مرتبه تفاضلي معادلو عمومي شکل چې غوښتل شوې تابع یې $u(x,y)$ ده او دوه خپلواک متحوله (x,y) لري په لاندې ډول ده.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f\left(x,y\right)$$

A,B,C,D,E,F او f ثوابت دي او y,x تابع ګانې په یوه ځانګړې ناحیه کې تعریف شوې، که چیرې په پاسینۍ معادله کې $f(x,y)$ له صفر سره مساوي شي، دې ډول تفاضلي معادلې ته متجانسه تفاضلي معادله وایي او که $f(x,y)$ صفر نه وي بیا نو دې تفاضلي معادلې ته غیرمتجانس تفاضلي معادله وایي.

پاسینۍ قسمي تفاضلي معادلې ته لاندې درې شرطونه شتون لري.

1. که $AC-\frac{B^2}{4}<0$ وي، قسمي تفاضلي معادله د هایپرابولیک له ډلې څخه ده چې تر ټولو ساده قسم یې عبارت ده له :

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

دغه ډول معادلې د فزیکي پروسو په اکثره څیړنو کې لکه د تار عرضي او طولي اهتزازونه، په سیم (مزي) کې بریښنایي اهتزازونه یعنې کله چې بریښنا له مزي تېرېږي، په میله کې اهتزازونه، د ګازونو اهتزاز او داسې نورو اهتزازونو کې کاریږي.

2. که $AC-\frac{B^2}{4}=0$ وي قسمي تفاضلي معادله د پارابولیک له ډلې څخه ده یا د تودوخې د خپریدو معادله چې بل نوم یې د فوریه معادلې په نامه یادیږي، تر ټولو ساده قسم یې عبارت دی له :

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

دغه معادلې د تودوخې د خپریدو لپاره، د ځمکې لاندې پرتو مایعاتو د فلتر کولو لپاره، د احتمالاتو په تیورۍ او داسې نورو مواردو کې کاریږي.

3. که $AC-\frac{B^2}{4}>0$ وي قسمي تفاضلي معادله د الپیتیک یا لاپلاس معادلو له ډلې څخه ده چې په لاندې ډول ښودل کیږي.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

پاسینۍ معادله د بریښنایي او مقناطیسي ساحو لپاره او د هایدروډینامیک په مسایلو کې استعمالیږي.

یادونه !

1. د تفاضلي معادلو د شکل بدلون ته کانوني عملیه وایي دغه معادلې هایپرابولیک ډوله $\Delta'=b'^2-ac>0$ پارابولیک $\Delta'=b'^2-ac=0$ او یا د فوریه معادلو له ډلې څخه دي، له یوه ډول څخه بل ډول ته اړولو ته کانوني عملیه وایي.

مثال: لاندې تفاضلي معادله په کانوني تفاضلي معادله واړوي ؟

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

حل: $\Delta'=b'-ac=\left(-xy\right)^2-x^2y^2=0\Rightarrow\Delta'=0$

نو پاسینۍ معادله پارابولیک ډوله ده اوس یې ځانګړې معادله لیکو چې لاندې شکل لري.

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$x^2\frac{1}{\partial x^2}-2xy\frac{1}{\partial x\partial y}+y^2\frac{1}{\partial y^2}=0\Rightarrow x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0$$

$$\left(xdy-ydx\right)^2=0\Rightarrow\ln y-\ln x=\ln c\Rightarrow\ln\frac{y}{x}=\ln c\Rightarrow\frac{y}{x}=c\Rightarrow y=xc$$

2. که چیرې $\Delta'=b'^2-ac<0$ وي اړونده معادله یې د الیپتیک معادلو څخه ده چې ځانګړې معادله یې په لاندې دوو ډولونو ویشل کیږي.

$$y'=\frac{-b'^2+\sqrt{\Delta'}}{a}\quad,\quad y'=\frac{-b'^2-\sqrt{\Delta'}}{a}$$

تمرین

1. لاندې تفاضلي معادلې حل کړی ؟

$$a.\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2+6x+1\qquad,\qquad b.\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3x+10$$

$$c.\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy\qquad,\qquad d.\ \frac{\partial u}{\partial x}=xy-2x-1$$

2. لاندې معادلې په کانوني معادلو واړوی ؟

$$e.\ \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\qquad,\qquad f.\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

د دویم مرتبه تفاضلي معادلو ځانګړتیاوې او حل یې

لاندې قسمي تفاضلي معادله :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\cdots(1)$$

چې a,b,c ثابت اعداد دي، y,x خپلواک متحولین دي، u د x او y تابع ده، نو (1) معادله په لاندې ډول څېړو که چېرې ښی طرف صفر وي.

1. که د (1) معادلې ضریبونه یعنې: $b=c=0\ ,\ a\neq 0$ وي نو :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=f(y)\Rightarrow du=f(y)dx\Rightarrow u(x,y)=xf(y)+g(y)$$

2. که د (1) معادلې ضریبونه یعنې $b=a=0\ ,\ c\neq 0$ وي، په دې صورت کې :

$$c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=f(x)\Rightarrow du=f(x)dy\Rightarrow u(x,y)=yf(x)+g(x)$$

3. که د (1) معادلې ضریبونه یعنې: $c=a=0\ ,\ b\neq 0$ وي په دې حالت کې:

$$2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=f(y)\Rightarrow du=f(y)dy\Rightarrow u(x,y)=F(y)+g(x)$$

4. که د (1) معادلې ضریبونه یعنې: $c\neq 0, a\neq 0\ ,\ b\neq 0$ وي نو :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

د حل لپاره یې لاندې تعویض په پام کې نیسو.

$$\xi=x+\lambda_1 y\ ,\ \eta=x+\lambda_2 y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\lambda_1+\frac{\partial u}{\partial\eta}\lambda_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\quad,\quad\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\xi}\lambda_1+\frac{\partial}{\partial\eta}\lambda_2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda^2{}_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda^2{}_2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\lambda_1+\frac{\partial u}{\partial\eta}\lambda_2\right)=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

که $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ قیمت په (1) معادله کې واچوو ترلاسه به کړو :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$A=a+2b\lambda_1+c\lambda^2{}_1$$
$$2B=2a+2b(\lambda_1+\lambda_2)+2c\lambda^2{}_2$$
$$C=a+2b\lambda_2+c\lambda^2{}_2$$

د فوريه $(Fourier)$ په طريقه د اهتزاز کوونکې رشتې د معادلې حل

د فوريه په طريقه د څپې معادله د لومړنيو او سرحدي شرطونو لاندې ترلاسه کوو.

$$\left.\begin{aligned} u(0,t)&=0\\ u(l,t)&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ سرحدي شرطونه

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0}&=f(x)\\ u_t(x,t)\big|_{t=0}&=\varphi(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ لومړني شرطونه

د څپې د معادلې $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ د حل لپاره لاندې تعويض تطبيق کوو.

$$u(x,t)=T(t)X(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=T(t)X'(x) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=T(t)X''(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=T'(t)X(x) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T''(t)X(x)$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Rightarrow a^2T(t)X''(x)=T''(t)X(x)\Rightarrow\frac{a^2T(t)X''(x)}{a^2T(t)X(x)}=\frac{T''(t)X(x)}{a^2T(t)X(x)}\Rightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda \quad , \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda\Rightarrow X''(x)+\lambda X(x)=0$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda\Rightarrow T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$$

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x \quad , \quad T(t)=C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\sin a\sqrt{\lambda}t$$

$$u(x,t)=\left(A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x\right)\left(C\cos a\sqrt{\lambda}t+D\sin a\sqrt{\lambda}t\right)$$

د لومړنيو شرايطو څخه په استفادې سره د $u(x,t)$ لپاره لرو چې:

$$u(x,0)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

له دې چې $u(l,t)=0 \quad , \quad u(0,t)=0$ ده؛ نو:

$$u(0,t)=A\cdot 1+B(0)=0\Rightarrow A=0$$

$$u(l,t)=A\cos\sqrt{\lambda}l+B\sin\sqrt{\lambda}l\Rightarrow B\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

له دې چې $B\neq 0$ ده نو $\sin\sqrt{\lambda}l$ هغه وخت امکان لري چې: $\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l}$ وي.

$$X(x)=B\sin\sqrt{\lambda}x=B\sin\frac{n\pi}{l}x$$

که چېرې $\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l}$ مشخصه قيمت او $X(x)=B\sin\frac{n\pi}{l}x$ مشخصه وکتور ونوموو، د λ ترلاسه شوي قيمتونه د مشخصه قيمتونو او د $X(x)$ تابع قيمتونه د مشخصه تابع د قيمتونو په نامه يادېږي، د λ د قيمتونو په وضع کولو سره $T(t)$ رابطه داسې هم ليکلی شو.

$$T(t)=C\cos\left(at\frac{n\pi}{l}\right)+D\sin\left(at\frac{n\pi}{l}\right)$$

$$u(x,t)=\left[A\cos\left(x\frac{n\pi}{l}\right)+B\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\right]\left[C\cos\left(at\frac{n\pi}{l}\right)+D\sin\left(at\frac{n\pi}{l}\right)\right]$$

$$\therefore A=0\,,\, u(x,t)=B\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\left[C\cos\left(at\frac{n\pi}{l}\right)+D\sin\left(at\frac{n\pi}{l}\right)\right]$$

$$u_n(x,t)=\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\left[C_n\cos\left(at\frac{n\pi}{l}\right)+D_n\sin\left(at\frac{n\pi}{l}\right)\right]$$

د n د قیمتونو لپاره کولی شو C_n او D_n ثوابت ترلاسه کړو او رابطه په لاندې ډول ښودل کیږي.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\left[C_n\cos\left(at\frac{n\pi}{l}\right)+D_n\sin\left(at\frac{n\pi}{l}\right)\right]$$

د لومړنیو شرایطو په تطبیق سره ترلاسه کوو چې:

$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=f(x)$ د فوریه د ضریبونو څخه په ګټه اخیستنی سره پوهیږو چې؛ نو:

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right)dx$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\left[C_n\cos\left(at\frac{n\pi}{l}\right)+D_n\sin\left(at\frac{n\pi}{l}\right)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\left[-C_n\sin\left(at\frac{n\pi}{l}\right)\left(a\frac{n\pi}{l}\right)+D_n\cos\left(at\frac{n\pi}{l}\right)\left(a\frac{n\pi}{l}\right)\right]$$

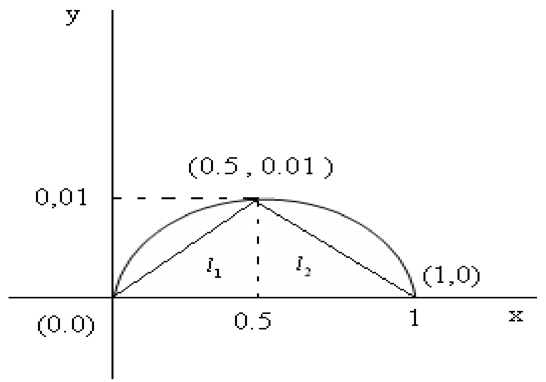
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\left(a\frac{n\pi}{l}\right)=\varphi(x)\Rightarrow a\frac{n\pi}{l}D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)dx$$

$$=>D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)dx$$

مثال: د فوریه په میتود د تاري اهتزاز قانون داسې ترلاسه کړی چې د تار طول $1cm$ او په دوو انجامونو کې داسې تړل شوی وي، چې $a=10$ وي او په لومړنیو شیبو کې تار د منځنۍ نقطې څخه د $0.01cm$ ارتفاع سره له لومړني سرعت څخه راخوشې شي ؟

حل:

$$u_{yy}=a^2u_{xx}\Rightarrow u_{yy}=10^2u_{xx}\quad,\quad\varphi(x)=0$$



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$l_1.\quad y-0=\frac{0.01-0}{0.5-0}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{50}x$$

$$l_1.\quad y-0.01=\frac{0-0.01}{1-0.5}(x-0.5)\Rightarrow y=-\frac{1}{50}x+0.02$$

لومړنی شرط:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{50} & 0\le x\le 0.5\\ -\dfrac{x}{50}+0.02 & 0.5\le x\le 1\end{cases}$$

$$u_y(x,y)\big|_{y=0}=\varphi(x)=0\quad,\quad u(0,y)=0\quad,\quad u(l,y)=0$$

له عمومي فورمول څخه لرو چې:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(x\frac{n\pi}{l}\right)\left[C_n\cos\left(ay\frac{n\pi}{l}\right)+D_n\sin\left(ay\frac{n\pi}{l}\right)\right]$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right)dx=2\int_0^1 f(x)\sin(nx\pi)dx$$

$$= 2\int_0^{0.5}\frac{x}{50}\sin(nx\pi)dx + 2\int_{0.5}^{1}\left(0.02-\frac{x}{50}\right)\sin(nx\pi)dx = \frac{0.08}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$C_1 = \frac{0.08}{\pi^2} \quad , \quad C_2 = \frac{0.08}{4\pi^2}(0) = 0 \quad , \quad C_3 = -\frac{0.08}{9\pi^2} \quad , \quad C_4 = 0, \cdots$$

$$\therefore \varphi(x) = 0 \Rightarrow D_n(x) = \frac{2}{10n\pi}\int_0^1 \varphi(x)\sin(n\pi x)dx = 0$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(xn\pi)[C_n\cos(ayn\pi) + D_n\sin(ayn\pi)] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{0.08}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos 10n\pi y\right)\sin(n\pi x)$$

$$= \frac{0.08}{\pi^2}\cos 10\pi y\sin\pi x - \frac{0.08}{9\pi^2}\cos 300\pi y\sin 3\pi x + \cdots$$

د دلامبر په طریقه د اهتزاز کوونکي تار د معادلې حل

د موج د معادلې عمومي شکل په لاندې ډول دی :

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

پاسینۍ معادله د لاندې لومړنیو شرایطو لاندې په پام کې نیسو :

لومړنی شرایط :

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)\big|_{t=0} &= f(x) \\ u_t(x,t)\big|_{t=0} &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

په پاسینۍ معادله کې د $\alpha = x - at \wedge \beta = x + at$ په تعویض سره داسې چې u د x تابع او t د α او β تابع وي، ترلاسه کوو چې :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \beta}(a) = a\frac{\partial u}{\partial \beta} - a\frac{\partial u}{\partial \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \beta} - a\frac{\partial u}{\partial \alpha} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \beta} - a\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(a\frac{\partial}{\partial \beta} - a\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)\left(a\frac{\partial u}{\partial \beta} - a\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)$$

$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \beta\partial \alpha} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$$

$$= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta\partial \alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\alpha}+\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}$$

$$=> \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(ii)$$

(i) او (ii) رابطه په پام کې نیسو بیا یې قیمتونه په (1) معادله کې اچوو، په پای کې ترلاسه کیږي چې:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$=> a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right) - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right) = 0$$

$$=> a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=0$$

$$=> 4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$$

$$4a^2 \neq 0 => \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0 \quad , \quad d\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0 => \frac{\partial u}{\partial\beta} = \varphi_1(\beta)$$

$$=> du = \varphi(\beta)d\beta => u = \psi_2(\beta)+\psi_1(\alpha)$$

$$=> u(\alpha,\beta) = \psi_2(\beta)+\psi_1(\alpha) => u(x,t) = \psi_1(x-at)+\psi_2(x+at)\cdots(3)$$

(3) رابطه د دلامبر په طریقه د اهتزاز کوونکې تار د معادلې عمومي حل دی، که لومړني شرایط په معادله تطبیق کړو ترلاسه کوو چې:

$$u(x,0) = \psi_1(x)+\psi_2(x) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\psi_1'(x-at)+a\psi_2'(x+at)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -a\psi_1'(x)+a\psi_2'(x) = \varphi(x)$$

$$\psi_1'(x)-\psi_2'(x) = -\frac{1}{a}\varphi(x)$$

$$\left(\psi_1(x)-\psi_2(x)\right)' = -\frac{1}{a}\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\psi_1(x)-\psi_2(x)\right)' dx = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi(x)dx$$

$$\Rightarrow \psi_1(x)-\psi_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi(x)dx \quad \cdots i$$

$$\psi_1(x)+\psi_2(x) = f(x) \quad \cdots ii$$

$$\overset{i+ii}{\Rightarrow} \psi_1(x)-\psi_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi(x)dx$$

$$\underline{\psi_1(x)+\psi_2(x) = f(x)}$$

$$2\psi_1(x) = f(x)-\frac{1}{a}\int_0^x \varphi(x)dx$$

$$\Rightarrow \psi_1(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi(x)dx$$

$$\overset{i-ii}{\Rightarrow}\psi_1(x)+\psi_2(x)=f(x)$$

$$\frac{{}_{-}\psi_1(x)-{}_{+}\psi_2(x)=-\frac{1}{{}_{+}a}\int_0^x\varphi(x)dx}{2\psi_2(x)=f(x)+\frac{1}{a}\int_0^x\varphi(x)dx}$$

$$\Rightarrow \psi_2(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi(x)dx$$

$$u(x,t)=u(\alpha,\beta)=\psi_1(\alpha)+\psi_2(\beta)$$

$$=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi(x)dx+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\left[-\int_0^{x-at}\varphi(x)dx+\int_0^{x+at}\varphi(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\varphi(x)dx-\int_0^{x-at}\varphi(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\varphi(x)dx+\int_{x-at}^{0}\varphi(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(x)dx$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(x)dx$$

$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(x)dx$ رابطه د دلامبر په ميتود د اهتزاز کوونکي تار د معادلې حل دی.

مثالونه

لومړی مثال: وښيئ چې لاندې دوه متحوله تابع د پارابوليک ډوله تفاضلي معادلې حل دی او که نه ؟

$$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

حل : پوهيږو چې د پارابوليک ډوله قسمي تفاضلي معادلو عمومي شکل عبارت دی له : $\frac{\partial u}{\partial y}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

نو :

$$u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.2x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x.(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1(x^2+y^2)-x.2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.2y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{y.(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

کـه چیـرې $a\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ وي پاسـینۍ تفاضـلي معادلـه د پارابولیـک ډولـه تفاضـلي معـادلې حـل دی؛ خـو د پاسـیني اصـل پـه نـه موجودیت کې د راکړل شوي تفاضلي معادلې حل نشته.

دویـم مثـال: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ معادلـه د $f(x)=x^2,\varphi(x)=6$ لومړنیـو شرایطو لاندې د دلامبر په طریقـه د اهتـزاز کـوونکي تـار د معـادلو د حـل پـه میتود ، حل کړی ؟

حل : پوهیږو چې :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(x)dx$$

د پاسینۍ معادلې او عمومي معادلې له پرتله کولو څخه په ډېر صراحت لیدل کیږي چې :

$$a=3,\ f(x)=x^2\Rightarrow f(x-at)=f(x-3t)=(x-3t)^2$$
$$f(x)=x^2\Rightarrow f(x+at)=f(x+3t)=(x+3t)^2$$

اوس ددې قیمتونو په پام کې نیولو سره د معادلې په حل پیل کوو.

$$\begin{aligned}\Rightarrow u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[(x-3t)^2+(x+3t)^2\right]+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}6dx\\&=\frac{1}{2}\left[x^2-6xt+9t^2+x^2+6xt+9t^2\right]+x\Big|_{x-3t}^{x+3t}\\&=\frac{1}{2}\left[2x^2+18t^2\right]+x+3t-x+3t\\&=x^2+9t^2+6t\end{aligned}$$
$$\Rightarrow u(x,t)=x^2+9t^2+6t$$

وروسـتۍ رابطـه د پاسـینۍ تفاضـلي معـادلې حـل دی البتـه د دلامبـر پـه میتود.

د معادلې د حل د صحت او نـه سموالي د پوهیـدو لپـاره معادلـه د راکړل شوو ، لومړنیو شرایطو په پام کې نیولو سره په لاندې ډول امتحانوو :

$$\Rightarrow u(x,t)=x^2+9t^2+6t$$
$$\Rightarrow u(x,0)=x^2=f(x)$$
$$\Rightarrow u_t(x,t)=18t+6\Rightarrow u_t(x,t)\big|_{t=0}=6=\varphi(x)$$

لیدل کیږي چې د معادلې حل راکړل شوو لومړنیو شرایطو ته صادق دی، په دې اساس ترلاسه شوې رابطه د پاسینۍ تفاضلي معادلې حل دی.

دریم مثال: وښیۍ چې $\ln\left(\dfrac{x+y}{1+y}\right)$ تابع د $u_{xx}=\dfrac{1}{a^2}u_{yy}$ تفاضلي معادلې حل ده او که نه ؟

حل : ددغـې تفاضـلي معـادلې پـه پـام کـې نیولـو سـره، دویـم مـشتق نظر دواړو متحولینو ته نیسو او په معادله کې یې اچوو ، ضمناً لیدل کیږي چې دغه تفاضلي معادله، موج ډوله تفاضلي معادله ده.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\left(\dfrac{x+y}{1+y}\right)'_x}{\dfrac{x+y}{1+y}}=\frac{\dfrac{1}{(1+y)}}{\dfrac{x+y}{1+y}}=\frac{1}{x+y}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{x+y}\right)_x=\frac{(0)(x+y)-1(1)}{(x+y)^2}=-\frac{1}{(x+y)^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\left(\frac{x+y}{1+y}\right)'_y}{\frac{x+y}{1+y}}=\frac{\frac{1(1+y)-(x+y)}{(1+y)^2}}{\frac{x+y}{1+y}}=\frac{\frac{1-x}{(1+y)^2}}{\frac{x+y}{1+y}}=\frac{1-x}{(1+y)^2}\cdot\frac{1+y}{x+y}=\frac{1-x}{(1+y)(x+y)}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1-x}{(1+y)(x+y)}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{1-x}{(1+y)(x+y)}\right)'_y=\left(\frac{1-x}{x+y+xy+y^2}\right)'_y$$

$$=\frac{(0)(x+y+xy+y^2)-(1-x)(1+x+2y)}{(x+y+xy+y^2)^2}$$

$$=\frac{-(1-x)(1+x+2y)}{(x+y+xy+y^2)^2}=-\frac{1+x+2y-x-x^2-2xy}{(x+y+xy+y^2)^2}$$

$$=-\frac{1+2y-x^2-2xy}{(x+y+xy+y^2)^2}=\frac{x^2+2xy-2y-1}{(x+y+xy+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+2xy-2y-1}{(x+y+xy+y^2)^2}$$

اوس ترلاسه شوي قیمتونه په معادله کې اچوو .

$$-\frac{1}{(x+y)^2}\neq\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^2+2xy-2y-1}{(x+y+xy+y^2)^2}$$

په ډېره آسانۍ لیدل کېږي چې : $u_{xx}\neq\frac{1}{a^2}u_{yy}$ پدې اساس $\ln\left(\frac{x+y}{1+y}\right)$ تابع د $u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_{yy}$ معادلې حل نه ده.

تمرینونه

وښیئ چې لاندې تابع ګانې د ورکړل شویو تفاضلي معادلو حل دی یا نه؟

1. $u(x,y)=\cos^2(x+y)$, $u_{xx}=-u_{yy}$
2. $u(x,t)=e^x\sin t$, $u_{xx}=-u_{tt}$
3. $u(x,t)=\sin(x-at)$, $a^2u_{xx}=u_{tt}$

د دلامبرد میتود په مرسته لاندې پوښتنې د اړونده لومړنیو شرایطو لاندې یې حل کړئ ؟

4. $u_{tt}-4u_{xx}=0$, $u_t(x,0)=0$, $u(x,0)=x$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,t)\big|_{t=0}=x^2-1$, $u_t(x,t)\big|_{t=0}=0$
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=2x$, $u(x,t)\big|_{t=0}=x$
7. $u_{tt}-u_{xx}=0$, $u(x,t)\big|_{t=0}=\sin x$, $u_t(x,t)\big|_{t=0}=\cos x$
8. $u_{yy}-u_{xx}=0$, $u_y(x,0)=c^x$, $u(x,0)=e^x$

د فوریه طریقې په مرسته لاندې پوښتنې ځواب کړئ ؟

1. د تاري اهتزاز قانون ترلاسه کړئ داسې چې د تار طول $2cm$ وي او په دوو انجامونو کې داسې ټینګ شوی وي چې په لومړنیو شیبو کې د منځنۍ نقطې څخه پرته له لومړني سرعت څخه خوشې شي؟

2. یو اهتزاز کوونکی تار په دوو انجامونو $x=0$ او $x=1$ کې داسې وتړل شي چې په لومړیو کې د تار معادله $u=4\frac{h}{l^2}x(h-x)=f(x)$ وي، په ox محور ددغې تار حرکت ترلاسه کړئ په هغه صورت کې چې په لومړنۍ سرعت یې سترګې پټې کړو ؟

3. د تار د اهتزاز فورمول په t لحظه کې داسې ترلاسه کړى چې د لومړني سرعت څخه يې صرف نظر شوى وي او ددغې مستقيم معادله داسې راکړل شوي وي.

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}\frac{2h}{l} & 0\le x\le \frac{l}{2}\\ \frac{2h}{l}(l-x) & \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases} \quad , \quad \varphi(x)=0$$

په نامحدوده ميله کې د تودوخې د خپريدو، د معادلې حل

د $a^2u_{xx}=u_t\cdots 1$ معادلې حل په $-\infty<x<\infty$ او $l<0$ ساحه کې د $u(x,0)=f(x)\cdots 2$ لومړنيو شرايطو لاندې داسې په پام کې نيسو چې د تودوخې ليږد (انتقال) د ميلې په انجامونو پورې اړوند نه وي يعنې ميله نامحدوده وي، د پاسينۍ معادلې حل د فوريه په طريقه څېړو.

$$u(x,t)=X(x)T(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$u_{xx}=X''(x)T(t) \quad , \quad u_t=X(x)T'(t)$$

$$a^2u_{xx}=u_t \Rightarrow a^2X''(x)T(t)=T'(t)X(x) \Rightarrow \frac{a^2X''(x)T(t)}{a^2X(x)T(t)}=\frac{T'(t)X(x)}{a^2X(x)T(t)}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)} \quad , \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda^2\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2 \Rightarrow X''(x)+\lambda^2X(x)=0\\ \frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda^2 \Rightarrow T'(t)+\lambda^2a^2T(t)=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

د پاسنيو معادلو حل عبارت دى له:

$$\left.\begin{array}{l}X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\\ T(t)=Ce^{-a^2\lambda^2t}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$u(x,t)=Ce^{-a^2\lambda^2t}(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)$$

$$u_\lambda(x,t)=e^{-a^2\lambda^2t}(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)\cdots\cdots(7)$$

که چيرې (7) رابطې څخه په $(0,\infty)$ انتروال کې د λ پارامتر په اساس انتيګرال ونيسو پدې صورت کې:

$$u(x,t)=\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2t}(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)d\lambda\cdots\cdots(8)$$

لومړني شرايط په پاسينۍ رابطه تطبيق کوو نو:

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^\infty (A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)d\lambda\cdots(9)$$

د فوريه د ضريب پر بنسټ د (8) رابطې لپاره لرو چې:

$$\left.A_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\lambda\tau\,d\tau \quad , \quad B_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau\right\}\cdots\cdots(11)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{e^{-a^2\lambda^2t}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\lambda\tau\,d\tau\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\lambda\tau\,d\tau\right)\sin\lambda x\right]\right\}d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)(\cos\lambda\tau\cos\lambda x+\sin\lambda\tau\sin\lambda x)d\tau\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\lambda(\tau-x)d\tau\right)d\lambda$$

د فوريه د تعويض پر بنسټ د (1) رابطې حل په لاندې ډول ترلاسه کيږي:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ta^2\lambda^2}\cos\lambda(\tau-x)d\tau\right)\right]d\lambda\cdots\cdots\cdots(12)$$

لاندې تعويض په پام کې نيسو : $\beta=\dfrac{\tau-x}{a\sqrt{t}}$ او $z=a\lambda\sqrt{t}$.

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(\tau)\left(\int_{0}^{\infty}e^{-ta^2\lambda^2}\cos\lambda(\tau-x)d\lambda\right)\right]d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(\tau)\left(\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty}e^{-z}\cos\beta z dz\right)\right]d\tau\cdots(13)$$

$$g(\beta)=\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta z\,dz\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$g'_{\beta}(\beta)=-\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}z\sin\beta z\,dz$$

$$*\left(u=\sin\beta z\Rightarrow du=\beta\cos\beta zdz\ ,\ dv=e^{z^2}zdz\Rightarrow v=\frac{-1}{2}e^{-z^2}\right)$$

$$g'_{\beta}(\beta)=-\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}z\sin\beta z\,dz\overset{*}{=}\frac{1}{2}e^{-z^2}\sin\beta z\Big|_{0}^{\infty}-\frac{\beta}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta zdz$$

$$g'_{\beta}(\beta)=-\frac{\beta}{2}g(x)=>\frac{g'_{\beta}(\beta)}{g(\beta)}=-\frac{\beta}{2}=>\ln g(\beta)=-\frac{\beta^2}{4}+\ln c=>g(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

$$g(0)=C\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

$$g(\beta)=\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta z\,dz\Rightarrow g(0)=\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdots\cdots\cdots(ii)$$

$$\overset{i,ii}{\Rightarrow}C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$g(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

د قيمتونو په پام کې نيولو او په (13) رابطه کې په اچولو سره ترلاسه کوو چې :

$$\int_{0}^{\infty}e^{-ta^2\lambda^2}\cos\lambda(\tau-x)d\tau=\frac{1}{a\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

$$=>u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{\frac{-(\tau-x)^2}{4ta^2}}d\tau\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

پاسينی فورمول د پواسون د انتيګرال په نامه يادېږي.

مثالونه

مثال: په يوه اوږده ميله کې د تودوخې خپريدا ترلاسه کړی، په هغه صورت کې چې د ميلې په $-l\le x\le l$ برخه کې د شيبو په لومړيو کې د تودوخې درجه $1030c^{\circ}$ او په بله نقطه کې د تودوخې درجه $30^{0}c$ وي ؟

حل : له دې چې ميله ډېره اوږده ده نو سرحدي شرايط يې صفر خو لومړني شرايط يې عبارت دي له :

$$u(x,0)=\varphi(\tau)=\begin{cases}1030c^{\circ} & -l\le\tau\le l\vee|\tau|\le l\\ 30c^{\circ} & |\tau|>l\end{cases}$$

که $\bar{u}=u-30c^{\circ}$ په پام کې ونيول شي نو پاسينی رابطه په لاندې ډول ليکلی شو.

$$\bar{u}(x,0)=\varphi(\tau)=\begin{cases}100c^{\circ} & -l\le\tau\le l\vee|\tau|\le l\\ 0c^{\circ} & |\tau|>l\end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

د پواسون د انتيګرال د تطبيق وروسته لرو چې :

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{\frac{-(\tau-x)^2}{4ta^2}} d\tau => \bar{u}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{\frac{-(\tau-x)^2}{4ta^2}} d\tau$$

$$\bar{u}(x,t) = \frac{500}{a\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^{l} e^{\frac{-(\tau-x)^2}{4ta^2}} d\tau$$

$$*\left(\frac{\tau-x}{2a\sqrt{t}} = z \Rightarrow \tau - x = z2a\sqrt{t} \Rightarrow d\tau = 2a\sqrt{t}dz\right)$$

$$u(x,t) = \frac{500}{a\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{-(l+x)}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} 2a\sqrt{t}dz = \frac{500}{\sqrt{\pi}} 2 \int_{\frac{-(l+x)}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz$$

$$= 500\left[erf\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right) - erf\left(-\frac{(l+x)}{2a\sqrt{t}}\right) + 30c^\circ\right]$$

په محدوده ميله کې د تودوخې د انتقال معادله

په محدوده ميله کې د تودوخې د انتقال د $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdots\cdots\cdots (1)$ معادلې د حل لپاره چې l يې طول او جانبي سطحه يې د تودوخې عايق وي د لاندې لومړنيو شرايطو لاندې :

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le l \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

او لاندې سرحدي شرايطو په پام کې نيولو سره :

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= \varphi_1(x) \\ u(l,t) &= \varphi_2(x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

د فوريه د تعويض په طريقه داسې عمل کوو.

$$u(x,t) = X(x)T(t) \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad , \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \cdots\cdots\cdots (6)$$

د (5) او (6) رابطو حل د تفاضلي معادلې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاندې ډول دی.

$$X(x) = A\cos x\sqrt{\lambda} + B\sin x\sqrt{\lambda}$$

$$T(t) = Ce^{-ta^2\lambda}$$

په (4) رابطه کې د پاسنیو قیمتونو له تعویض څخه ترلاسه کوو چې :

$$u(x,t)=Ce^{-a^2\lambda t}\left(A\cos x\sqrt{\lambda}+B\sin x\sqrt{\lambda}\right)$$

د سرحدي شرایطو په تطبیقولو سره لرو چې :

$$X(0)=A\cdot 1+B\cdot(0)\Rightarrow A=0$$

$$X(l)=A\cos l\sqrt{\lambda}+B\sin l\sqrt{\lambda}=0$$

$$B\sin l\sqrt{\lambda}=0\ \ ,\ \ B=>\sin l\sqrt{\lambda}=0=>\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l}\ \ ,\ \ n\in IN$$

$$u(x,t)=Ce^{-a^2\lambda t}B\sin x\sqrt{\lambda}=CBe^{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

د لومړنیو شرایطو په تطبیق سره داسې لیکلی شو :

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

د همیلتون اپراتور

له وکتور انالیز څخه پوهیږو چې نابلا (∇) مساوي ده په :

$$Nebla=Del=\nabla:=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$$

1. $u(x,y,z)$ سکالري تابع په پام کې نیسو.

که نابلا د u سکالري تابع سره داخلي (سکالري) ضرب شي د u تابع ګراد ترلاسه کیږي، یعنې :

$$\nabla u=grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial x}j+\frac{\partial u}{\partial x}k$$

2. $\vec{\varphi}=\varphi(x,y,z)$ وکتوري تابع په پام کې نیسو.

که نابلا د $\vec{\varphi}$ وکتوري تابع سره داخلي (سکالري) ضرب شي د φ دیورژنس ترلاسه کیږي، یعنې :

$$\nabla\vec{\varphi}=div\vec{\varphi}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=(\varphi_1 i+\varphi_2 j+\varphi_3 k)\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial x}j+\frac{\partial}{\partial x}k\right)$$

3. د لاپلاس معادله د یوې سکالري تابع او د نابلا له مربعي ضرب څخه ترلاسه کیږي، یعنې :

$$\nabla(\nabla u)=\nabla^2 u=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\therefore\quad i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1\quad,\quad i\cdot j=k\cdot i=\cdots=0$$

د لاپلاس معادله

تعریف: $\nabla^2 u = \Delta u = 0$ قسمي تفاضلي معادله چې $\Delta \equiv \nabla^2$ پکې لاپلاسین سمبول دی، د لاپلاس معادله نومیږي.

که u دوه متحوله تابع وي د لاپلاس معادله دوه بعدي خو که u درې متحوله تابع وي د لاپلاس معادله هم درې بعدي ده او که چیرې u تابع n بعدي وي د لاپلاس معادله ته n بعدي وايي.

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$$
$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0$$
$$\vdots$$
$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0$$

په استوانوي مختصاتو کې د لاپلاس یا الپتیک ډوله معادله

که $u = u(x,y,z)$ په قایم مختصاتو کې په پام کې ونیسو په دې صورت کې د لاپلاس معادله په لاندې شکل لیکلی شو.

$$\nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

په پاسینۍ معادله کې Δ د لاپلاس د اپراتور په نامه یادیږي.

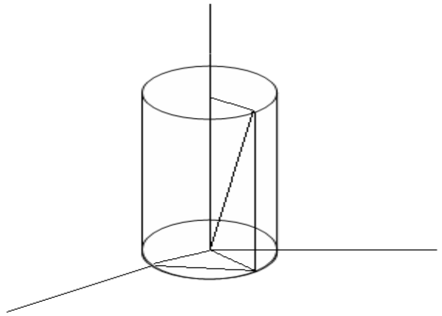
$u = u(x,y,z)$ تابع ته هارمونیک وايي کله چې:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

وي په استوانوي مختصاتو کې د یوې نقطې مختصات په (r,φ,z) ښودل کیږي، پدې اساس لرو چې:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi \quad , \quad z = z \quad , \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} \quad , \quad z = z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$



y,x او z متحولین په لاندې ډول په φ, z او r متحولینو اړوو.

$$u(x,y,z) = \bar{u}(r,\varphi,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdots (3)$$

په همدې ترتیب :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\rightarrow\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\cdots(4)$$

که چیرې $\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial^2 r}{\partial x^2},\frac{\partial^2 r}{\partial y^2},\frac{\partial \varphi}{\partial x},\frac{\partial \varphi}{\partial y},\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},\frac{\partial \varphi}{\partial y^2}$ قیمتونه له (2) رابطې څخه ترلاسه او په (3),(4) او (5) رابطو کې واچول شي، او وروسته بیا (3),(4) او (5) رابطې طرف په طرف جمع کړو لاندې معادله ترلاسه کیږي.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}=0\\&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)$$

پاسینۍ معادله د استوانوي مختصاتو په سیستم کې د لاپلاس معادله نومیږي.

تبصره !

که چیرې $u(x,y)=\bar{u}(r,\varphi)$ وي پدې صورت کې 6 رابطه کولی شو په لاندې ډول ولیکو .

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}=0$$

پاسینۍ معادلې ته په قطبي مختصاتو کې د لاپلاس معادله وايي او کولی شو داسې یې هم ولیکو :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}=0$$

د فوریه په طریقه د لاپلاس د معادلې حل

په استوانوي مختصاتو کې د لاپلاس معادلې عمومي حل عبارت دی له:

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

پاسینۍ معادله کولی شو د لاندې تعویض په مرسته حل کړو.

$$\bar{u}(r,\varphi,z)=V(r,z)\,F(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}=V(r,z)\frac{d^2F}{d\varphi^2}\quad,\quad\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}=F(\varphi)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

پاسیني قیمتونه په (1) معادله کې اچوو :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}V\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+F\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

د پاسینۍ رابطې دواړه خواوې له $\frac{r^2}{VF}$ سره ضرب کوو.

$$\frac{r}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\frac{1}{F}+\frac{r^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{r}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\frac{1}{F}$$

$$\frac{r}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\frac{1}{F}=\lambda^2$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\frac{1}{F}=\lambda^2 \Rightarrow F''+\lambda^2F=0$$

$$\frac{r}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\lambda^2 \Rightarrow \frac{r}{V}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{r^2}{V}\frac{\partial^2V}{\partial z^2}-\lambda^2=0\cdots(3)$$

$$F''(\varphi)+\lambda^2F(\varphi)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

د پاسینۍ معادلې حل عبارت دی له:

$$F(\varphi)=A\cos\lambda\varphi+B\sin\lambda\varphi\cdots\cdots\cdots(5)$$

د (3) معادلې په حل کې د دویم ځل لپاره د فوریه تعویض تطبیقوو ترڅو هغه په معمولي معادله واوړي.

$$V(r,z)=R(r)Z(z)\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=Z(z)R'(r)\qquad,\qquad \frac{\partial^2V}{\partial z^2}=Z''(z)R(r)$$

پاسیني قیمتونه په (3) رابطه کې وضع کوو.

$$\frac{r}{V}\frac{\partial}{\partial r}(rZ(z)R'(r))+\frac{r^2}{V}Z''(z)R(r)-\lambda^2=0$$

د پاسینۍ معادلې دواړه خواوې په r^2 تقسیموو:

$$\frac{1}{rV}\frac{\partial}{\partial r}(rZ(z)R'(r))+\frac{1}{V}Z''(z)R(r)-\frac{\lambda^2}{r^2}=0$$

د پاسینۍ رابطې دواړه طرفه په $R(r)Z(z)$ تقسیموو:

$$\frac{1}{rVR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))+\frac{1}{VZ(z)}Z''(z)-\frac{\lambda^2}{r^2R(r)Z(z)}=0$$

$$\frac{1}{rVR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{\lambda^2}{r^2R(r)Z(z)}=-\frac{Z''(z)}{VZ(z)}$$

اوس پاسینۍ رابطه له V سره ضربوو؛ نو:

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{V\lambda^2}{r^2R(r)Z(z)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

له دې چې $V=R(r)Z(z)$ ده؛ نو: $\frac{V}{R(r)Z(z)}=1$ ده په دې اساس:

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{\lambda^2}{r^2}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}\quad,\quad \frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{\lambda^2}{r^2}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=k^2$$

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{\lambda^2}{r^2}=k^2\Rightarrow\frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{\lambda^2}{r^2}-k^2=0\cdots(7)$$

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=k^2\Rightarrow Z''(z)+k^2Z(z)=0\cdots\cdots\cdots(8)$$

د (4),(7) او (8) معادلو مجموعي حل کاملاً د (1) معادلې له حل سره شباهت لري:

$$u(r,\varphi,z)=R(r)F(\varphi)Z(z)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

د مشخصه معادلې د جذرونو او د پاسینۍ تفاضلي معادلې د قسمي حل په پام کې نیولو سره داسې لیکلی شو:

$$y^*=(A\cos kz+B\sin kz)$$

خو د (7) معادلې حل کولی شو داسې ترلاسه کړو:

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{\lambda^2}{r^2}-k^2=0$$

د پاسینۍ معادلې دواړه خواوې له R سره ضربوو:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))-\frac{\lambda^2R(r)}{r^2}-k^2R(r)=0$$

$$\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+R'(r)\right)+\left(-k^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$\frac{R'(r)}{r}+\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\left(-k^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0\cdots\cdots\cdots(10)$$

که چیرې $x=rk\Rightarrow r=\frac{x}{k}$ وضع شي؛ نو :

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{R'(r)}{r}+\left(-k^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0\Rightarrow\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{x/k}\frac{R'(r)}{r}+\left(-k^2-\frac{\lambda^2}{\left(x/k\right)^2}\right)R(r)=0$$

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+\frac{k}{x}\frac{R'(r)}{r}+\left(-k^2-\frac{\lambda^2k^2}{x^2}\right)R(r)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

د (11) رابطې دواړه خواوې له x^2 سره ضربوو :

$$x^2R''(r)+kxR'(r)+\left(k^2x^2-k^2\lambda^2\right)R(r)=0$$

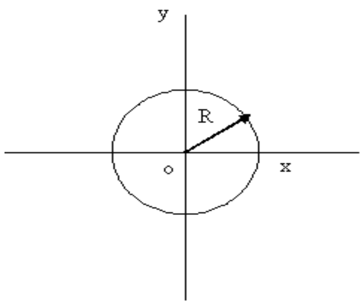
له دې چې د $x^2y''+xy'+\left(x^2-p^2\right)y=0$ معادلې په اړه مو مخکې هم معلومات درلودل؛ نو پدې اساس (11) معادله د بسل معادله ده چې :

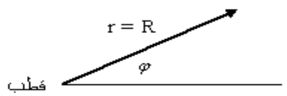
$$R_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}$$

د پاسینۍ معادلې حل دی او د بسل استوانوي تابع په نامه یادیږي.

په دایره کې د دیریکلیت مسالې حل

په xoy مستوي کې R شعاع لرونکې دایره داسې په پام کې نیسو چې مرکز یې د متخصاتو په مبداء کې او محیط یې د $f(x)$ تابع وي.





که چیرې قطبي زاویه په φ وښیو، $u(r,\varphi)$ داسې ترلاسه کوو چې د دایرې دننه د لاپلاس معادله : $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ وي او د دایرې په محیط کې لاندې شرایط صدق وکړي.

$$u(r,\varphi)\big|_{r=R}=f(\varphi)$$

پوهیږو چې په قطبي مختصاتو کې د لاپلاس معادله په لاندې ډول ده.

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\varphi^2}=0$$

$$r^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial r^2}+r\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\varphi^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

د فوریه د تعویض په اساس لرو چې :

$$u(r,\varphi)=F(\varphi)R(r)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = F(\varphi)R''(r) \qquad , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = F''(\varphi)R(r)$$

$$r^2F(\varphi)R''(r)+rF(\varphi)R'(r)+R(r)F''(\varphi)=0$$

$$\frac{r^2F(\varphi)R''(r)}{R(r)F(\varphi)}+\frac{rF(\varphi)R'(r)}{R(r)F(\varphi)}+\frac{R(r)F''(\varphi)}{R(r)F(\varphi)}=0$$

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)}+\frac{rR'(r)}{R(r)}+\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}=0 \quad , \quad -\frac{r^2R''(r)}{R(r)}-\frac{rR'(r)}{R(r)}=\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}$$

$$-\frac{r^2R''(r)}{R(r)}-\frac{rR'(r)}{R(r)}=\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}=-k^2$$

$$\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}=-k^2 \Rightarrow F''(\varphi)+k^2F(\varphi)=0\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$F(\varphi)=A\cos k\varphi+B\sin k\varphi$$

$$-\frac{r^2R''(r)}{R(r)}-\frac{rR'(r)}{R(r)}=-k^2$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$R(r)=Cr^k+Dr^{-k}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$u(r,\varphi)=(A\cos k\varphi+B\sin k\varphi)(Cr^k+Dr^{-k})$$

$$u_k(r,\varphi)=(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)(C_kr^k+D_kr^{-k})\cdots\cdots\cdots(7)$$

که چیرې $k=0$ شي پدې صورت کې (4) او (5) معادله کولی شو داسې ولیکو:

$$F''(\varphi)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4')$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)=\cdots\cdots(5')$$

د پاسیني معادلې حل عبارت دی له:

$$u_0=(A_0+B_0\varphi)(C_0+D_0\ln r)\cdots\cdots\cdots\cdots(6')$$

په پریودیک شکل د پاسینۍ معادلې حل، د φ یوه تابع ده داسې چې د r عین قیمتونه ته د φ او $\varphi+2\pi$ قیمتونه هم عین نقطې ته ځانګړي کیږي، په نتیجه کې $B_0=0$ کیږي او له دې چې د معادلې حل په دایره کې محدود او متمادي دی نو طبعاً د دایرې په مرکز $(r=0)$ کې د معادلې حل واضیح دی، په پایله کې که $D_0=0$ وي $(6')$ رابطه کولی شو داسې ولیکو:

$$u_0=A_0C_0=\frac{A_0}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7')$$

د $(7')$ رابطې حل د k بېلابېلو قیمتونو ته کولی شو داسې ولیکو:

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)r^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

A_n او B_n ثوابت داسې راپیداکوو چې د (z) رابطې شرایطو ته صادق وي، یعنې په پاسینۍ رابطه کې $r=R$ وضع کیږي.

$$u|_{r=R}(r,\varphi)=f(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)R^n\cdots\cdots(9)$$

له دې پاره چې (9) رابطه له ځانه یو مفهوم افاده کړي نو باید $f(\varphi)$ تابع په $(-\pi,\pi)$ انټروال کې نظر فوریه لړۍ (سلسلې) ته تجزیه کړی شو داسې چې A_nR^n او B_nR^n د فوریه ضرایب وي او دغه ضرایب د لاندې فورمولونو په اساس ترلاسه کیږي.

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ A_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

(8) رابطه داسې هم ليکلی شو :

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-\varphi)dt\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right]dt\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$*\quad 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n 2\cos n(t-\varphi)$$

پوهيږو چې :

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Rightarrow 2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n 2\cos n(t-\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}\right]$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\underset{*}{\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n}+\left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right]$$

له دې چې پاسينۍ لړۍ د $\left|\frac{r}{R}\right|<1$ لپاره متقاربه ده داسې چې :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n=\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}+\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^2+\cdots$$

نو د هندسې لړۍ پواسطه پاسينۍ رابطه داسې هم ليکلی شو :

$$\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}+\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^2+\cdots=\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\left(1+\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}+\cdots\right)=\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}$$

$$=\frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}$$

په همدې ترتيب $\left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n$ ته هم وده (انکشاف) ورکوو.

$$*\quad 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}\right]$$

$$=1+\left(\frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}+\frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}\right)=\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}$$

(11) رابطه کولی شو داسې هم وليکو :

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\left(R^2-r^2\right)}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}dt\cdots\cdots\cdots(12)$$

پاسينۍ رابطې ته د پواسون انتيګرال وايي.

په یوه کړیز (حلقوي) ساحه کې د لاپلاس د معادلې حل

داسې یوه کړۍ په پام کې نیسو چې د $X^2+Y^2=R_1^2$ او $X^2+Y^2=R_2^2$ دایرو ترمنځ د لاندې سرحدي شرایطو لاندې راچاپیره شوې وي.

$$u\big|_{r=R_1}=u_1 \quad , \quad u\big|_{r=R_2}=u_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

په قطبي مختصاتو کې د لاپلاس د دایرې مربوط معادلې حل په لاندې ډول څېړو.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0\Rightarrow u=c_1\ln r+c_2\cdots\cdots (3)$$

د (1) شرایطو په تطبیق سره c_1 او c_2 قیمتونه ترلاسه کوو.

$$u_1=c_1\ln R_1+c_2 \quad , \quad u_2=c_1\ln R_2+c_2$$

$$u_2-u_1=c_1\ln R_2-c_1\ln R_1=c_1\ln\frac{R_2}{R_1}\Rightarrow \quad c_1=\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad \bullet$$

$$c_2=u_1-\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\ln R_1=\frac{u_1\ln R_2-u_1\ln R_1-u_2\ln R_1+u_1\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$=\frac{u_1\ln R_2-u_2\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad \bullet$$

c_1 او c_2 قیمتونه په دریمه رابطه کې وضع کوو؛ نو:

$$u=c_1\ln r+c_2=\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\ln r+\frac{u_1\ln R_2-u_2\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{u_2\ln\frac{r}{R_1}-u_1\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

مثال: په یوه دایروي فولادي پاڼه کې چې R شعاع لري د تودوخې خپریدل داسې ترلاسه کړئ چې نیمه برخه یې 1^0c قیمت ولري او د نیمې پاتې برخې تودوخه یې 0^0c وي؟

حل: په دایره کې د دیریکلت د مسالې (د پواسون فورمول) څخه لرو چې:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\left(R^2-r^2\right)}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}dt$$

له دې چې $0<t<\pi$ دی؛ نو $f(t)=1c^0$ او $-\pi<t<0$ ده په دې اساس $f(t)=0c^0$ ده.

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\left(R^2-r^2\right)}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}dt$$

د نیمایي زاویې له جنسه د مثلثاتي توابعو تعویض په پام کې نیسو.

$$\tan\frac{t-\varphi}{2}=\tau\Rightarrow\arctan\tau=\frac{t-\varphi}{2}\Rightarrow 2\arctan\tau=t-\varphi\Rightarrow dt=\frac{2d\tau}{1+\tau^2}$$

$$\cos(t-\varphi)=\cos^2\frac{(t-\varphi)}{2}-\sin^2\frac{(t-\varphi)}{2}=\frac{\cos^2\frac{(t-\varphi)}{2}-\sin^2\frac{(t-\varphi)}{2}}{\cos^2\frac{(t-\varphi)}{2}+\sin^2\frac{(t-\varphi)}{2}}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\sin^2\dfrac{(t-\varphi)}{2}}{\cos^2\dfrac{(t-\varphi)}{2}}}{1-\dfrac{\sin^2\dfrac{(t-\varphi)}{2}}{\cos^2\dfrac{(t-\varphi)}{2}}}=\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$$

$$u(x,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\dfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2}+r^2}\frac{2d\tau}{1+\tau^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{R^2-r^2(1+\tau^2)}{R^2(1+\tau^2)-2Rr(1+\tau^2)+r^2(1+\tau^2)}\frac{2d\tau}{1+\tau^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{R^2-r^2}{R^2+R^2\tau^2-2Rr+2Rr\tau^2+r^2+r^2\tau^2}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr+r^2+(R^2+2Rr+r^2)\tau^2}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2+(R+r)^2\tau^2}d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{(R-r)(R+r)}{(R-r)(R-r)+[(R+r)(R+r)]\tau^2}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{\dfrac{(R-r)(R+r)}{(R-r)(R+r)}}{\dfrac{(R-r)(R-r)}{(R-r)(R+r)}+\dfrac{[(R+r)(R+r)]}{(R-r)(R+r)}\tau^2}d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{d\tau}{\dfrac{(R-r)}{(R+r)}+\dfrac{(R+r)}{(R-r)}\tau^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{d\tau}{\dfrac{(R-r)}{(R+r)}\left(1+\dfrac{\dfrac{(R+r)}{(R-r)}}{\dfrac{(R-r)}{(R+r)}}\tau^2\right)}=\frac{1}{\pi}\frac{(R+r)}{(R-r)}\int_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}\frac{d\tau}{1+\left(\dfrac{R+r}{R-r}\right)^2\tau^2}$$

$$=\frac{R+r}{\pi(R-r)}\arctan\frac{R+r}{(R-r)}\tau\Bigg|_{-\tan\frac{\varphi}{2}}^{\cot an\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{R+r}{\pi(R-r)}\left[\arctan\left(\frac{R+r}{(R-r)}\cot an\frac{\varphi}{2}\right)+\arctan\left(\frac{R+r}{(R-r)}\tan\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

مخکې له دې چې په کروي مختصاتو کې د لاپلاس د معادلې په حل پيل وکړو، اړينه يې بولو ترڅو هغه د موضوع مربوط (په کروي مختصاتو کې د لاپلاس د معادلې حل) ځينې مفاهيم په لنډه دروپيژنو لکه، د کروي مختصاتو لنډه پيژنده، په کروي او قايم مختصاتو کې د لاپلاس معادله او بالاخره په کروي مختصاتو کې د لاپلاس د معادلې حل يې ددې بحث اصلي موضوعګانې دي.

د کروي مختصاتو سیستم

د کروي مختصاتو د لنډې معرفي لپاره یوه P مادي نقطه په پام کې نیسو. کولی شو د یوه سیستم موقعیت او ځانګړنې د قایم مختصاتو په واسطه تعین کړو، خو په عمومي توګه نشو کولی د قایم مختصاتو څخه استفاده وکړو، ځکه د مادي نقطې ډېری حرکتونو په دې سیستم کې نشي ترلاسه کیدلی.

د ساري په توګه د مرکزي قوې په ساحه کې، د یوه مستوي پرمخ د مادي نقطې حرکت کې، ښه ده چې استوانوي قطبي مختصات (د x او y پرځای r او θ) وکارول شي، همدې ته ورته کله چې قوه، کروي ډوله متناظره وي؛ نو کروي مختصات φ ، θ او r کارول کیږي، نو ویلی شو چې بېلابېل مختصات د یوې مادي نقطې د ځای او ځانګړنو لپاره د مسالې ځانګړنې ته په کتو سره کاریږي.

سربېره پدې یو سیستم باید دداسې مختصاتو سره وکارول شي چې په شمېر کې په کافي اندازه ډېر وي، ترڅو د سیستم ځانګړتیاوې تعین کړی شي.

په O نقطه کې یو نسبتي جسم xy مستوي او x او z محور ته په کتو سره په پام کې نیسو، پدې صورت کې کولی شو یو نوی سیستم نظر xy مستوي او x او z محورنو ته تعریف کړو، په کروي مختصاتو کې د یو جسم موقعیت له مبداء (O) څخه په r او دوو زاویو (θ او φ) باندې په بشپړ ډول ښودلی شو.

θ هغه زاویه ده چې r د ځای وکتور (د موقعیت وکتور) یې د z محور سره جوړوي او φ هغه زاویه ده چې په z محور د P نقطې د عمودي واټن مرتسم یې په xy مستوي کې جوړوي، r ، θ او φ د مادي نقطې د کروي مختصاتو په نامه یادیږي.

د قایم او کروي مختصاتو ترمنځ اړیکې

له دې چې د قایم مختصاتو سیستم درې مختصې (z,y,x) لري؛ نو که چیرې $u(x,y,z)$ تابع په قایم مختصاتو کې راکړل شوی وي همدغه تابع په کروي مختصاتو کې عبارت ده له: $u(x,y,z)=u(r,\theta,\varphi)$ له دې چې د پاسینی رابطې په ښي طرف کې u تابع د r,θ,φ مختصاتو له جنسه ښودل شوی په داسې حال کې چې کین لور بیا د y,x او z مختصاتو په مرسته وښودل شوي چې د پاس یاد شویو دوو مختصاتو ښودونکې دی، نو دلته مونږ له دې پاره چې ددغې دوو مختصاتو ترمنځ اړیکه ترلاسه کړو، یو شکل په پام کې نیسو.

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho\sin\varphi \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho\cos\varphi \cdots\cdots\cdots (2) \\ \sin\theta = \dfrac{\rho}{r} \Rightarrow \rho = r\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \\ \cos\theta = \dfrac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (4) \end{cases}$$

له (3) رابطې څخه په (1) او (2) رابطه کې د ρ قیمتونو په اچولو سره لاندې پایلې ترلاسه کیږي چې د کروي او قایم مختصاتو یو بل ته د اړلو معادلې دي.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

اوس د مسالې برعکس عمل کوو، r د قیمتونو د ترلاسه کولو لپاره $(1),(2)$ او (3) رابطه لومړی مربع او بیا یې جمع کوو.

$$x^2+y^2+z^2=r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\cos^2\theta$$
$$x^2+y^2+z^2=r^2\left[\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\cos^2\theta\right]$$
$$x^2+y^2+z^2=r^2\left[\sin^2\theta+\cos^2\theta\right]$$
$$x^2+y^2+z^2=r^2\quad\Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

له دې پاره چې د θ قیمت ترلاسه کړو د (1) او (2) رابطو د مربعو مجموع په (3) رابطه تقسیموو.

$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=\frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\theta}$$
$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=\frac{r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}{r^2\cos^2\theta}$$
$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=\tan^2\theta\Rightarrow\ \tan\theta=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}}\quad\Rightarrow\theta=\arctan\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}}$$

په (1) رابطه د (2) رابطې له تقسیم وروسته د φ قیمت ترلاسه کولی شو.

$$\frac{y}{x}=\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r\sin\theta\cos\varphi}=>\frac{y}{x}=\tan\varphi\ =>\varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\arctan\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z^2}} \\ \varphi=\arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

وروستۍ پایلې په قایم مختصاتو د کروي مختصاتو د تبدیل معادلې دي.

مخکې مو د یوې مادي نقطې د ځای وکتور په قایم مختصاتو کې په $r=xi+yj+zk$ وښودلو اوس که د y,x او z قیمتونه په وروستۍ رابطه کې وضع کړو نو په کروي مختصاتو کې د ځای وکتور مو ترلاسه کړی.

$$u=r\sin\theta\cos\varphi i+r\sin\theta\sin\varphi j+r\cos\theta k$$

د لاندې رابطو په مرسته کولی شو د e_r، e_φ او e_θ قیمتونه ترلاسه کړو چې e_r په r جهت واحد وکتور دی، e_θ په θ خوا واحد وکتور دی او e_φ په φ لور واحد وکتور دی.

د وکتور انالیز او مماس واحد وکتور په مرسته داسې لیکلی شو.

$$e_r=\frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|}=\frac{\sin\theta\cos\varphi i+\sin\theta\sin\varphi j+\cos\theta k}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi}}$$
$$e_r=\frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|}=\frac{\sin\theta\cos\varphi i+\sin\theta\sin\varphi j+\cos\theta k}{\sqrt{\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\cos^2\theta}}$$
$$e_r=\frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|}=\frac{\sin\theta\cos\varphi i+\sin\theta\sin\varphi j+\cos\theta k}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}$$
$$e_r=\frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|}=\sin\theta\cos\varphi i+\sin\theta\sin\varphi j+\cos\theta k$$

په همدې ډول په φ جهت واحد وکتور هم ترلاسه کوو:

$$e_\varphi=\frac{\frac{\partial r}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right|}=\frac{-r\sin\theta\sin\varphi i+r\sin\theta\cos\varphi j}{\sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}}$$
$$e_\varphi=\frac{\frac{\partial r}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right|}=\frac{r\sin\theta\left(-\sin\varphi i+\cos\varphi j\right)}{r\sin\theta\sqrt{\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}}$$
$$e_\varphi=\frac{\frac{\partial r}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right|}=-\sin\varphi i+\cos\varphi j$$

په θ طرف واحد وکتور عبارت دی له:

$$e_\theta = \frac{\frac{\partial r}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right|} = \frac{r\cos\theta\cos\varphi i + r\cos\theta\sin\varphi j - r\sin\theta k}{\sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta}}$$

$$e_\theta = \frac{\frac{\partial r}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right|} = \frac{r\left(\cos\theta\cos\varphi i + \cos\theta\sin\varphi j - \sin\theta k\right)}{r\sqrt{\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \sin^2\theta}}$$

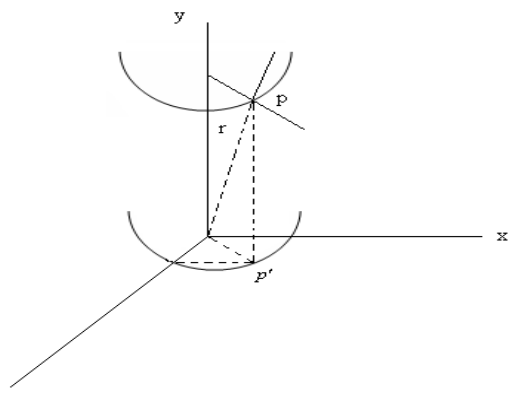
$$e_\theta = \frac{\frac{\partial r}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right|} = \frac{\cos\theta\cos\varphi i + \cos\theta\sin\varphi j - \sin\theta k}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

$$e_\theta = \frac{\frac{\partial r}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right|} = \cos\theta\cos\varphi i + \cos\theta\sin\varphi j - \sin\theta k$$

په کروي مختصاتو کې د لاپلاس معادله

په کروي مختصاتو کې د لاپلاس د معادلې د ټاکلو لپاره ټولو هغو مختصو ته اړتیا لیدل کیږي، کومې چې ددغې مختصاتو په معرفي کې بیان شوې.

په مخکنیو شمېرنو (د قایم او کروي مختصاتو ترمنځ اړیکو) کې مو ددغې دوو مختصاتو ترمنځ اړیکې ترلاسه کړې خو په دې برخه کې یوازې هغه یادوو.



پوهیږو چې د کروي مختصاتو پرمخ د یوې نقطې ځانګړې کول دریو مختصو هره یوه r ، θ او φ ته اړتیا ده، دلته له دې چې په شمیرنو کې مو اسانتیا راوستې وي ($u = u(r,\varphi)$ یعنې u تابع د θ له جنسه نه ده) په پام کې نیسو.

په دیکارتي مختصاتو کې د لاپلاس معادله کې د ترلاسه شوو پایلو د تعویضولو سره لاندې معادله ترلاسه کیږي.

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

که درې مختصې په پام کې ونیول شي یعنې u د r ، φ او θ تابع وي، معادله یې بیا په لاندې ډول ده.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

وروستۍ رابطه په کروي مختصاتو کې د لاپلاس معادله ده چې درې واړه متحوله یې د کروي مختصاتو متحولین دي.

د فوریه په میتود په کروي مختصاتو کې د لاپلاس د معادلې حل

په دې برخه کې په کروي مختصاتو کې د لاپلاس د معادلې حل څېړو.

فرضوو چې $u=u(x,y,z)$ تابع په قایم مختصاتو کې راکړل شوې وي؛ نو پدې صورت کې همدغه تابع په کروي مختصاتو کې عبارت ده.

$$u(x,y,z)=u(r,\theta,\varphi)$$

په دغې مختصاتو کې مو د لاپلاس معادله مخکې ومونده چې په لاندې ډول ده.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\cdots(1)$$

لکه څرنګه چې لیدل کیږي په وروستۍ رابطه کې u یوه مجهوله تابع ده او هیڅ راز ستندرد تفاضلي معادلې ته ورته نه ده ترڅو په خپلواک ډول حل شي، پدې اساس یاده معادله د فوریه د تعویض په مرسته حل کوو.

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Gamma(\theta,\varphi)$$

اوس د u تابع مشتقونه نظر r,θ او φ متحولینو ته ترلاسه کوو او وروسته یې په (1) رابطه کې اچوو یعنې:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\Gamma(\theta,\varphi)R'(r)\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=R(r)\dfrac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\\[2mm]\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=R(r)\dfrac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\Gamma(\theta,\varphi)R'(r)\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta R(r)\frac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R(r)\frac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

پورتنۍ رابطه له $\dfrac{r^2}{R(r)\Gamma(\theta,\varphi)}$ سره ضربوو او لاندې نتیجه په لاس راځي.

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2R'(r)\right)+\frac{1}{\Gamma(\theta,\varphi)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Gamma(\theta,\varphi)\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2R'(r)\right)+\frac{1}{\Gamma(\theta,\varphi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

وروستۍ رابطه کولی شو د واټن د یوه متحول او د دوو زاویوي متحولینو له جنسه تفکیک کړو، په همدې ډول کولی شو چې د یوه ثابت λ سره یې مساوي وضع کړو.

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2R'(r)\right)=-\frac{1}{\Gamma(\theta,\varphi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda$$

وروستۍ رابطه په بېل بېل ډول د λ سره مساوي وضع کوو چې د دوو نورو معادلو په ترلاسه کولو منتج کیږي.

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2R'(r)\right)=\lambda\Rightarrow 2rR'(r)+r^2R''(r)-\lambda R(r)=0\cdots\cdots(2)$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\theta,\varphi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda\cdots\cdots(3)$$

(2) معادله یوه خطي دویم مرتبه تفاضلي معادله ده چې متحول ضریبونه لري، د اویلر په طریقه حل کیږي او حل یې عبارت دی له:

$$R(r)=c_1r^m+c_2r^{-(m+1)}$$

د (3) معادلې د حل لپاره د فوریه له تعویض څخه کار اخلو او Γ تابع داسې په پام کې نیسو.

$$\Gamma(\theta,\varphi)=V(\theta)\phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda\Gamma(\theta,\varphi)=0\cdots(3)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\theta}=\phi(\varphi)V'(\theta)\\[2mm]\dfrac{\partial^2\Gamma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=V(\theta)\phi''(\varphi)\end{cases}$$

د فوریه له تعویض څخه ترلاسه شوي قیمتونه په (4) معادله کې اچوو.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\phi(\varphi)V'(\theta)\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}V(\theta)\phi''(\varphi)+\lambda V(\theta)\phi(\varphi)=0$$

که چیرې پاسینۍ رابطه له $\frac{1}{V(\theta)\phi(\varphi)}\sin^2\theta$ سره ضرب کړو؛ نو:

$$\frac{\sin\theta}{V}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V'(\theta)\right)+\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}+\lambda\sin^2\theta=0$$

وروستۍ رابطه نظر په θ او φ متحولینو تفکیک کوو او د یوه ثابت k^2 سره مساوي وضع کوو.

$$\frac{\sin\theta}{V}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V'(\theta)\right)+\lambda\sin^2\theta=-\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}=k^2\quad,\quad k\in IN$$

اوس د وروستۍ رابطې ښۍ او کیڼ لور دواړه بېل بېل له k^2 ثابت سره مساوي وضع کوو چې په پایله کې دوې نورې معادلې ترلاسه کیږي.

$$-\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}=k^2\Rightarrow\ \phi''(\varphi)+k^2\phi(\varphi)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\sin\theta}{V}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V'(\theta)\right)+\lambda\sin^2\theta=k^2$$

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V'(\theta)\right)+\lambda V\sin^2\theta-k^2V=0\cdots\cdots(5)$$

(5) معادله ثابت ضریب لرونکې خطي دویم مرتبه تفاضلي معادله ده چې حل یې په لاندې ډول دی.

$$\phi(\varphi)=Ae^{ik\varphi}+Be^{-ik\varphi}$$

د (6) معادلې د ترلاسه کولو په موخه دواړه خواوې یې په $\frac{v}{\sin^2\theta}$ تقسیموو.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V'(\theta)\right)+\lambda V-\frac{k^2}{\sin^2\theta}V=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V'(\theta)\right)+\left(\lambda-\frac{k^2}{\sin^2\theta}\right)V=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\cos\theta V'(\theta)+\sin\theta V''(\theta)\right)+\left(\lambda-\frac{k^2}{\sin^2\theta}\right)V=0$$

$$V''(\theta)+\cot\theta V'(\theta)+\left(\lambda-\frac{k^2}{\sin^2\theta}\right)V=0$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dV}{d\theta}+\left(\lambda-\frac{k^2}{\sin^2\theta}\right)V=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

وروستۍ معادله د لژاندر معادلې ته ورته ده یعنې:

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

پدې اساس (z) معادله د لژاندر د معادلې په نامه یادیږي.

که چیرې $x=\cos\theta$ داسې چې $|x|\le 1$ او $y'(x)=v(\theta)$ وي وضع شي په دې صورت کې د لژاندر معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي.

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(\lambda-\frac{k^2}{1-x^2}\right)y=0$$

که $k=0$ وي؛ نو :

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$$

وروستۍ رابطه د (7) معادلې حل ده، که چیرې هغه تعویضونه مو چې د معادلې د حل پرمهال په پام کې نیولي وو په (1) معادله کې وضع شي نو د (1) معادلې عمومي حل نومیږي، یعنې :

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Gamma(\theta,\varphi)$$
$$=R(r)V(\theta)\phi(\varphi)=\left[\left(c_1r^m+c_2r^{-(m+1)}\right)p_k(\cos\theta)\right]\quad\left[Ae^{ik\varphi}+Be^{-ik\varphi}\right]$$

وروستۍ معادله په کروي مختصاتو کې د لاپلاس د معادلې حل دی، چې د لژاندر د پولینوم په مرسته کولی شو ډېرې پوښتنې پرې ځواب کړو.

مثالونه

لومړی مثال: وښیۍ چې $u=\frac{c}{r}$ معادله په کروي مختصاتو کې د لاپلاس معادلې ته صادقه ده او که نه ؟

حل : له دې چې دلته u یوازې د r تابع ده؛ نو د لاپلاس معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي.

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0$$

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial u}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$$

د u تابع لومړی او دویم مشتقونه عبارت دي له :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=-\frac{c}{r^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}&=\frac{2c}{r^3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\Delta u=\frac{2c}{r^3}+\frac{2}{r}\left(-\frac{c}{r^2}\right)=0\Rightarrow\frac{2c}{r^3}-\frac{2c}{r^3}=0$$

دویم مثال: که $u=\frac{1}{3}+r^2\left(\cos^2\varphi-\frac{1}{3}\right)$ تابع تعریف شوې وي وښیۍ چې $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=0$ معادلې ته صادقه ده ؟

حل : ترټولو دمخه راکړل شوې معادله ساده کوو.

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\frac{\partial u}{\partial r}+\cot\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial r} = 2r\left(\cos^2\varphi - \dfrac{1}{3}\right) \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 2\left(\cos^2\varphi - \dfrac{1}{3}\right) \\
\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -2r^2 \cos\varphi \sin\varphi \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 2r^2 \sin^2\varphi - 2r^2 \cos^2\varphi
\end{cases}
$$

په اصلي معادله کې د وروستیو قیمتونو په اچولو سره لرو چې :

$$2r^2\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\right) + 4r^2\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\right) + \cot\varphi\left(-2r^2\cos\varphi\sin\varphi\right) +$$

$$+ 2r^2\sin^2\varphi - 2r^2\cos^2\varphi = 0$$

$$2r^2\cos^2\varphi - \frac{2}{3}r^2 + 4r^2\cos^2\varphi - \frac{4}{3}r^2 - 2r^2\cos^2\varphi +$$

$$+ 2r^2\sin^2\varphi - 2r^2\cos^2\varphi = 0$$

$$-2r^2 + 2r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = 0$$

$$-2r^2 + 2r^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

دریم مثال: وښیې چې د $\nabla^2 u = 0$ حل چې یوازې په $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ پورې تړاو لري مساوي دی په $u = \frac{c}{r} + k$ داسې چې c, k ثوابت دي ؟

حل : له دې چې u یوازې د r تابع ده؛ نو د لاپلاس معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

د معادلې د حل لپاره لاندې تعویض په پام کې نیسو.

$$v = \frac{\partial u}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r}v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{v} + \frac{2\partial r}{r} = 0$$

$$\int\frac{dv}{v} + 2\int\frac{dr}{r} = 0 \Rightarrow \ln v + \ln r^2 = \ln(-c)$$

$$\ln vr^2 = \ln(-c) \Rightarrow v = -\frac{c}{r^2}$$

له دې چې $v = \frac{\partial u}{\partial r}$ دی؛ نو :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{c}{r^2} \Rightarrow \int du = -c\int r^{-2} dr$$

$$\Rightarrow u = \frac{c}{r} + k$$

تمرین

1. که چیرې $u(r,\theta)$ ، $\nabla^2 u = 0$ ته صادقه وي، وښیئ چې $u(r,\theta)=v(r^{-1},\theta)$ هم $\nabla^2 v = 0$ ته صادق دی ؟

2. وښیئ چې د لاپلاس دوه بعدي معادلې حل چې یوازې په $r=\sqrt{x^2+y^2}$ پورې اړوند دی له $u = c\ln r + k$ سره مساوي ده ؟

3. په کروي مختصاتو کې چې $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ او $z = r\cos\varphi$ تعریف شوی، په دیکارتي مختصاتو واړوئ ؟

4. د دوو هم محوره استوانو ترمنځ چې r_0 او r_1 شعاعوې لرې په ترتیب u_0 او u_1 تودوخې لري، $(c\ln r + k = u)$ ؟

5. دوې متحدالمرکز کرې چې r_0 او r_1 شعاعوې لري او د تودوخې درجه یې په ترتیب u_0 او u_1 ده ؟

$$\left(\frac{c}{r}+k=u\right)$$

دریم فصل

د دویم مرتبه خطي تفاضلي معادلو ډلبندي (تصنیف)

د دویم مرتبه قسمي خطي، تفاضلي معادلو تحول (د شکل بدلون)

دویم مرتبه قسمي خطي تفاضلي معادله چې دوه متحوله ولري عمومي شکل یې په لاندې ډول دی.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+f\frac{\partial u}{\partial y}+gu+h=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

په پاسنیو تفاضلي معادلو کې $u(x,y)$ تابع مجهوله تابع ده او a,b,c,d,f,g,h په G ناحیه کې د x او y تابع تعریف شوي، د لاندې متحول د تعویض په مرسته د پاسینۍ معادلې شکل واړوو.

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=\varphi(x,y)\\ \eta&=\psi(x,y)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

داسې چې η,ζ خپلواک متحولونه خو د y,x تابع دی او فرضوو چې په G ناحیه کې یاکوبي دیترمینانت عبارت دی له :

$$\begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix} \neq 0$$

د (x,y) او (ζ,η) متحولونو د تعریف په ناحیه کې یو په یو تفاضل موجود دی.

په دې صورت کې د (2) رابطې سیستم نظر (x,y) متحول ته یوازینی (یو قیمته) **حل** لري.

اوس لومړی او دویم مشتقونه نظر η,ζ ته ترلاسه کوو.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}.\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}.\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

دویم مرتبه ضمني مشتقونه یې په لاندې ډول دی.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right]^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right]^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots(1)$$

په ورته ډول :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right]^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]^2 + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdots(2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} \cdots(3)$$

د $(1),(2)$ او (3) رابطو ښي طرف عبارت دی له خطي تابع ګانو نظر لومړی او دویم مرتبه مشتقونو ته یې. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$

که چیرې ټول قیمتونه په (1) معادله کې واچوو، په دې صورت کې (1) معادله د η,ζ له جنسه یوه خطي معادله ده، یعنې :

$$\bar{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\bar{b}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} + \bar{c}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u\right] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

داسې حال کې چې f نظر $(\frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, u)$ متحول ته خطي تابع ده. د $\bar{c},\bar{b},\bar{a}$ قیمتونه په لاندې ډول دي.

$$\bar{a} = a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(5_1)$$

$$\bar{c} = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5_2)$$

$$\bar{b} = a\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2b\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] + c\frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \cdots\cdots\cdots\cdots(5_3)$$

تعویض کولی شو داسې وټاکو چې پواسطه یې د (4) رابطې ضریبونه صفر شي $\bar{c}=0, \bar{a}=0$ ؛ نو ددې لپاره اړینه ده چې ψ,φ تابع داسې وټاکل شي ترڅو لاندې رابطه صدق وکړي.

$$a\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + 2b\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + c\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 = 0 \cdots\cdots\cdots (6)$$

که ζ د (6) معادلې حل وي، باید $\bar{a}=0$ شي خو که η د (6) معادلې حل وي باید $\bar{c}=0$ وي.

قضیه

له دې پاره چې $z=f(x,y)$ تابع د G ناحیې په ټولو برخو کې (6) معادله صدق وکړي نو لاندې د حل سیټ اړین دی.

$$f(x,y)=k \cdots\cdots\cdots (7)$$

(عمومي حل) لاندې معادلې ته صادق دی.

$$a(dy)^2 + 2bdxdy + c(dx)^2 = 0 \cdots\cdots\cdots (8)$$

ثبوت: اړین شرایط له دې $f(x,y)=z$ ، (6) رابطې ته صادق شي نو باید (8) رابطې ته هم صدق وکړي.

فرضاً $z=f(x,y)\in G$ ، (6) رابطې ته صادق وي، په دې صورت کې ښیو چې $f(x,y)=k$ ، (8) رابطې ته رښتینې ده، ددې لپاره هرې نقطې ته k منحني ځانګړې ده او لاندې رابطه صدق کوي.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-dy}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \lambda$$

$$dx = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad dy = -\lambda\frac{\partial f}{\partial x} \cdots\cdots\cdots (9)$$

(9) رابطه په (8) رابطه کې اچوو؛ نو:

$$(dx)^2 = \lambda^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \quad , \quad (dy)^2 = \lambda^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

$$\lambda^2\left[a\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + c\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \cdots\cdots\cdots (10)$$

نو ولیدل شول چې (8) معادله (6) معادلې ته صادقه ده.

$f(x,y)=k$ د k ځانګړې قیمتونه ته د (8) معادلې حل دی.

له دې چې $z=f(x,y)$ یوه کیفي منحني ده او د G ناحیې له ټاکلې نقطې څخه $f(x,y)$ منحني تېرېږي پدې صورت د $f(x,y)=k$ منحني ګانو مجموع د (8) معادلې له حل څخه عبارت دی.

شرط کافي دی: فرضاً د (8) رابطې عمومي حل وي، پدې صورت کې ښیو چې $f(x,y)=k$ د (6) معادلې عمومي حل دی، ددې لپاره $M_0(x_0,y_0)\in G$ په پام کې نیسو او هغه منحني چې له دې نقطې څخه تېرېږي په $f(x,y)=k_0$ ښیو، وروسته له مشتق نیوو څخه لرو:

$$dx = -\lambda F'_y \quad , \quad dy = \lambda F'_x \cdots\cdots\cdots (11)$$

که (11) رابطه په (8) رابطه کې واچوو لرو چې:

$$\lambda^2\left(a(f'_x)^2 + 2bf'_x\cdot f'_y + c(f'_y)^2\right) = 0$$

په $M_o(x_0,y_o)$ نقطه کې لرو چې:

$$a(x_0,y_0)(f'_x)^2\Big|_{x_0,y_0} + 2b(x_0,y_0)f'_xf'\Big|_{x_0,y_0} + c(x_0,y_0)(f'_y)^2\Big|_{x_0,y_0} = 0$$

له دې چې $M_o(x_0, y_o)$ د G یوه کیفي نقطه ده. نو د G هرې نقطې ته (6) رابطه صادقه ده. $f(x,y)=k$ هم د (6) معادلې حل دی ځکه $f(x,y)=k_0$ کیفي دی. (8) معادله د ځانګړې (مشخصه) معادلې په نامه یادیږي، د (8) معادلې حل دوې نورې تفاضلي معادلې زیږوي.

$$y'_x = \frac{b'^2 + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$y'_x = \frac{b'^2 - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

اوس که $\varphi(x,y)=k$ او $\psi(x,y)=k$ د (12) رابطې ځانګړي منحني ګان وي نو دغه میتود د مشخصه میتود په نامه یادیږي. له قضیې څخه پایله اخلو چې $z=\varphi(x,y)$ او $z=\psi(x,y)$ د (6) معادلې حل دی، اوس باید وښیو چې $\varphi(x,y)$ او $\psi(x,y)$ له یو بل څخه خپلواک دی او یاکوبي متریکس یې د صفر خلاف دی، که $b'^2-ac>0$ وي. ځکه که $\zeta=(x,y)$ او $\eta=(x,y)$ په (1) رابطه کې تطبیق کړو لکه مخکې مو چې ترلاسه کړ: $\bar{a}=0$ او $\bar{c}=0$ دی او له (5) رابطې څخه ترلاسه شوې معادله داسې ده:

$$2\bar{b}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\zeta} + f\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}, \frac{\partial u}{\partial\eta}, u, \zeta, \eta\right) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta} = \phi\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}, \frac{\partial u}{\partial\eta}, u, \zeta, \eta\right) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

فرضاً که د (16) معادلې حل ترلاسه شي؛ نو د (1) معادلې د حل لپاره تعویض په پام کې نیسو؛ نو دغه حل باید د (1) معادلې وي.

مثالونه

مثال: د لاندې معادلې عمومي حل ترلاسه کړئ؟

$$x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

حل: د عمومي معادلې سره له پرتله کولو وروسته لرو چې: $a=x^2$، $b=0$ او $c=-y^2$.

$$b'^2 - ac = x^2y^2 > 0$$

مشخصه معادله:
$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow (y'_x)^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln y - \ln x = \ln k \Rightarrow yx = k \Rightarrow y = kx \Rightarrow \frac{y}{x} = k$$

اوس که $\zeta = \frac{y}{x}$ او $\eta = yx$ وضع شي نو نظر تعویضي معادلې ته لرو چې:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}\cdot\frac{\partial\zeta\partial\eta}{\partial x\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

له دې چې $\frac{\partial\zeta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ دی؛ نو:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\left(\frac{y^2}{x^4}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}\left(\frac{-y^2}{x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}y^2 + \frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{2y}{x^3} + \frac{\partial u}{\partial\eta}(0)$$

په همدې ترتیب د y لپاره لرو چې:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\cdot\frac{1}{x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}x^2$$

دغه قیمت په لومړنۍ راکړل شوې رابطه کې اچوو.

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Rightarrow -4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}+0+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{2y}{x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=\frac{1}{2xy}\cdot\frac{\partial u}{\partial\zeta}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=\frac{1}{2\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\zeta}$$

وروستۍ معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{\partial u}{\partial\zeta})=\frac{1}{2\eta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\zeta}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial\zeta}=v$$

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{v}{2\eta}\Rightarrow\ln v=\ln\sqrt{\eta}\cdot c\quad,\quad c=c(\zeta)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\zeta}=\sqrt{\eta}\cdot c\Rightarrow u=\sqrt{\eta}\int c(\zeta)d\zeta+c_1=\sqrt{\eta}c_2(\zeta)+c_1(\eta)$$

$$\Rightarrow u=\sqrt{\eta}\cdot c_2(\zeta)+c_1(\eta)$$

اوس که اړونده قیمتونه د x او y له جنسه وضع کړو؛ نو :

(البته په عمومي حالت کې): $u=\sqrt{xy}\cdot c_2(\frac{y}{x})+c_1(xy)$

(په خصوصي حالت کې): $u=\sqrt{yx}(\frac{y}{x})^2+\ln(xy)$

(بل حل یې) : $u=\sqrt{yx}\sin(\frac{y}{x})+\sqrt[4]{yx}$

پاسیني حلونه د یادې معادلې حلونه دي.

په کانوني شکل د دویم مرتبه قسمي تفاضلي معادلو د شکل تغیرول

باید ووایو چې :

1. که $\Delta'=b'^2-ac>0$ وي، دویم مرتبه قسمي تفاضلي معادله په ټوله G ناحیه یا په $M(x,y)$ نقطه کې هایپربولیک ډوله ده.

2. که $\Delta'=b'^2-ac=0$ وي، تفاضلي معادله په G ناحیه او یا $M(x,y)$ نقطه کې پارابولیک ده.

3. که $\Delta'=b'^2-ac<0$ وي، معادله په G ناحیه او یا $M(x,y)$ نقطه کې الپتیک ده.

که منحني (1) او (2) یا (1) او (3) شرایطو ته صدق وکړي نو دې ته مخلوط منحني ګان وایي او د تعویض په صورت کې هیڅ وخت هم اصلي معادلې ته نه اوړي پدې شرط چې یاکوبي یې د صفر خلاف وي، د ساري په توګه :

$$\overline{\Delta}=\Delta\begin{vmatrix}\zeta'_x & \zeta'_y\\ \eta'_x & \eta'_y\end{vmatrix}\quad,\quad\overline{\Delta}=\overline{b}^2-\overline{a}\overline{c}$$

نو د $\overline{\Delta}$ اشاره په Δ پورې اړوند دی.

پدې اساس هغه معادله چې شکل یې اوښتی نظر تعویض ته بدلون نه منونکي خاصیت لري.

هایپربولیک ډوله کانوني معادله

هایپربولیک ډوله کانوني معادله لاندې شکل لري :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=\phi(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\ ,u\ ,\zeta\ ,\eta)$$

په پارابولیک ډوله کانوني معادله کې $\Delta' = b'^2 - ac = 0$ قاسمیه ده؛ نو :

1. $c=0$ یا $a=0 \Leftarrow ac=0 \Leftarrow b=0$.

2. $b'\neq 0 \Rightarrow b'^2 - ac > 0 \Rightarrow a>0 \quad , \quad c>0$ $\ c>0$ یا $a<0, c<0$

یا a او c ډېرې وخت غتې ټاکي.

فرضاً $a=\alpha^2$ او $c=\beta^2$ وي، اوس د α او β اشاره داسې ټاکو چې د b له اشارې سره مطابقت کوي، یعنې : $sign(ac) = sign\ b \Rightarrow b=\alpha\beta$

پدې صورت کې عمومي تفاضلي معادله لاندې شکل لري.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\beta^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+f\frac{\partial u}{\partial y}+gu+h=0\cdots\cdots(1)$$

مشخصه معادله یې لاندې شکل لري :

$$\alpha^2\, dy^2 - 2\alpha\beta dxdy + \beta^2\, dx^2 = 0$$

دا یو کلي دیفرانسیل دی چې کولی شو په لاندې شکل یې وښیو.

$$(\alpha\, dy - \beta dx)^2 = 0 \Rightarrow \alpha dy - \beta dx = 0 \Rightarrow dy = \beta/\alpha\, dx \Rightarrow y = \beta/\alpha\, x + c$$

عمومي شکل یې عبارت دی له $\varphi(x,y)=k$ څخه، د (1) معادلې د ساده کولو لپاره لاندې تعویض په پام کې نیسو. $\zeta=\varphi(x,y)$ د مشخصه

معادلې عمومي حل دی او $\eta=\psi(x,y)$ مشتق شوې تابع او له ζ څخه خپلواک ده.

$$\zeta=\varphi(x,y) \quad , \quad \eta=\psi(x,y)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

که (1) رابطه کې (2) رابطه تعویض شي، پدې صورت کې $\bar a = 0$ کیږي، له قضیې څخه ترلاسه کیږي، چې $\varphi(x,y)$ د لاندې معادلې حل دی.

$$\alpha^2(z'_x)^2+2\alpha\beta\ z'_x\ z'_y+\beta^2(z'_y)=0$$

او هم د :

$$\bar a = a(\frac{\partial\zeta}{\partial x})^2+2b\frac{\partial\zeta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}+c(\frac{\partial\zeta}{\partial y})^2$$

په پام کې نیولو سره، له دې چې $\zeta=\varphi(x,y)$ او $\varphi=(x,y)$ د معادلې حل ده؛ نو په حقیقت کې $\bar a=0$ ده.

نو $\eta=\psi(x,y)$ مشتق نیوونکې او کیفي تابع ده، نو $\bar c\neq 0$ ده، ځکه د $\bar c$ قیمت له $\eta=\psi(x,y)$ سره تقابل کوي پدې حالت کې b ضریب لاندې شکل لري.

$$\bar b = a\frac{\partial\zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+b(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x})+c\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$=\alpha^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\alpha\beta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\alpha\beta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta^2\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$=\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}[\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial\eta}{\partial y}]+\beta\frac{\partial\zeta}{\partial y}(\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial\eta}{\partial y})$$

$$=\left[\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]\left[\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\beta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

هایپربولیک ډوله ته ورته کولی شو لاندې قضیه ثبوت کړو.

قضیه

له دې پاره چې $z = f(x,y)$ په G ناحیه کې لاندې معادله صدق کړي اړیــن او کــافي دی چـــې د $f(x,y) = k$ او (4) $\alpha z'_x + \beta z'_y = 0 \cdots\cdots$ منحني ګانو او هم لاندې معادلې ته صادق وي.

$$\alpha\, dy - \beta\, dx = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

پدې حالت کې: $\varphi(x,y)$ د $\alpha\, dy - \beta\, dx = 0$ معادلې حل دی.

پایلـه: پـوهیږو چـې $\varphi(x,y)$ د $\alpha\, dy - \beta\, dx = 0$ معـادلې حـل دی، د پاسینۍ قضیې پـه تطبیـق سره $\varphi(x,y)$ د $\alpha z'_x + \beta z'_y = 0$ معـادلې حل دی، دلته د (3) فورمول په تطبیق سره کولی شو ولیکو چې $b = 0$ دی او پـه همدې ترتیب پـه پارابولیـک ډولـه معـادلو کې $a = 0$ ، $b = 0$ دی؛ نو تغیر شوې معادله یې لاندې ساده شکل لري.

$$\bar{c}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\ ,u\ ,\zeta,\ \eta\right) = 0$$

یا په پراخه توګه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\ ,u\ ,\zeta\ ,\eta\right)\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

(6) معادله د پارابولیک معادلو کانوني معاده ده.

مثالونه

مثال: د لاندې معادلې عمومي حل ترلاسه کړی ؟

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

حــل: لــه دې چــې $\Delta' = b'^2 - ac = (-xy)^2 - x^2y^2 = 0$ دی؛ نــو (7) معادله پارابولیک ده.

او س یې مشخصه معادله لیکو چې لاندې شکل لري.

$$x^2dy^2 + 2xydxdy + y^2dx^2 = (xdy + ydx)^2 = xdy + ydx = 0 \cdots (8)$$

د مشخصه معادلې حل عبارت دی له:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln k \Rightarrow \ln\frac{k}{x} \Rightarrow y = \frac{k}{x} \Rightarrow yx = k$$

په څلورم پړاو کې په (7) معادله د ζ , η تعویض تحمیلوو، داسې یې ټاکو چې η د ζ سره رابطه ونه لري او $\eta = y$, $\zeta = xy$ د حل پورې اړوند نه وي.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

نو:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta^2}xy + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}y\right] + \frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

او $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}(y)^2$ هم: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta}x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta}x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 0$

نو په اصله معادله کې د وضع کولو څخه لرو چې :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}y^2-2xy\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}xy+\frac{\partial u}{\partial\zeta\partial\eta}y\right)+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]+y^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}x+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right]+2x\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

له دې چې : $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial u}{\partial x}$ ده؛ نو $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\zeta}y$ کیږي، ددغې قیمتو په اچوولو سره په پاسینۍ معادله کې :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}y^2=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\eta}=k(\zeta)$$

نو $c=c(\zeta)=c(xy)$, $u=k\eta+c$ دی؛ نو : $u=k(xy)y+c(xy)$

$$u=kxy^2+cxy\cdots\cdots\cdots(8)$$

خصوصي حل یې $u=\ln(xy)+\frac{1}{xy}$ دی او بل حل یې : $u=y\sin(xy)+\sqrt[3]{xy}$ دی.

الیپتیک ډوله کانوني معادله

که چیرې $\Delta'=b'^2-ac<0$ وي؛ نو اړونده معادله یې الیپتیک ډوله ده او مشخصه معادله یې په دوو لاندې معادلو ویشل کیږي.

$$y'=\frac{b'^2+\sqrt{b'^2-ac}}{a}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y'=\frac{b'^2-\sqrt{b'^2-ac}}{a}\cdots\cdots\cdots(2)$$

د (1) او (2) رابطې ښۍ خواوې په خپل منځ کې د کامپلکس عدد مزدوج دي، فرضاً $\varphi(x,y)$ د (1) معادلې حل وي، نو $\varphi^*(x,y)$ د $\varphi(x,y)$ مزدوج دی او د (2) رابطې حل دی، او پدې اساس یاده معادله کولی شو د تعویض د تطبیق وروسته ولیکو.

$$\zeta=\varphi(x,y)\quad,\quad\eta=\varphi^*(x,y)\cdots\cdots\cdots(3)$$

نو :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=\phi\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\,,\,\frac{\partial u}{\partial\eta}\,,\,u\,,\,\zeta\,,\,\eta\right)\cdots\cdots\cdots(4)$$

ζ , η کامپلکس متحولین دي، له دې پاره چې کامپلکس متحولین په حقیقي متحولینو واوړي یو بل تعویض تطبیق کوو یعنې :

$$\alpha=\frac{\zeta+\eta}{2}\quad,\quad\beta=\frac{\zeta-\eta}{2i}$$

داسې چې α , β حقیقي متحولین دي، اوس $\frac{\partial u}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial u}{\partial\eta}$ شمېرو :

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial u}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2i}\right)$$

او هم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial u}{\partial\beta}(-\frac{1}{2i})\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+i\frac{\partial u}{\partial\beta})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{\partial u}{\partial\alpha}-i\frac{\partial u}{\partial\beta})\frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\beta}(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+i\frac{\partial u}{\partial\beta})\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+i\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta})\frac{1}{2}+(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+i\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2})(-\frac{i}{2})\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+i\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-i\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right]=\frac{1}{4}(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2})$$

$$=>\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\phi(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial\beta}\ ,\ u\ ,\ \alpha\ ,\ \beta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

مثالونه

مثال: لاندې معادله حل کړی ؟

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

حل : له $ady^2-2bdx\,dy+cdx^2=0$ مشخصه معادلې څخه لرو چې :

$$dy^2-4dxdy+5dx^2=0\Rightarrow(y'_x)^2-4y'_x+5=0$$
$$y'_x=2\pm i\Rightarrow y=(2\pm i)x\pm k$$

$$\frac{dy}{dx}=2+i\Rightarrow dy=(2+i)dx$$
$$y=(2+i)x+k$$

دا يو خصوصي حل دی.

اوس غواړو عمومي شکل يې وليکو :

$$y=(2\pm i)x+k$$
$$y-(2\pm i)x=k$$
$$y-2x+ix=k\quad,\quad y-2x-ix=k$$

اوس لاندې تعويض ترسره کوو :

$$\zeta=\varphi(x,y)=(y-2x)-xi$$
$$\eta=\varphi^*(x,y)=(y-2x)+xi$$

نو :

$$\alpha=\frac{\zeta+\eta}{2}=y-2x\quad,\quad\beta=\frac{\zeta-\eta}{2i}=-x$$

اوس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ د عمومي فورمول څخه ترلاسه کوو.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}(-2) + \frac{\partial u}{\partial \beta}(-1)$$

$$= -2\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} = -\left[2\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\partial}{\partial \alpha}\left[2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right] = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta})\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial \beta}\left[(2\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta})\frac{\partial \beta}{\partial x}\right]$$

$$= -\left[(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta})(-2)\right] + (2\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2})(-1) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}$$

$$u_{xx} = 4u_{\alpha\alpha} + 4u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta} = 0$$

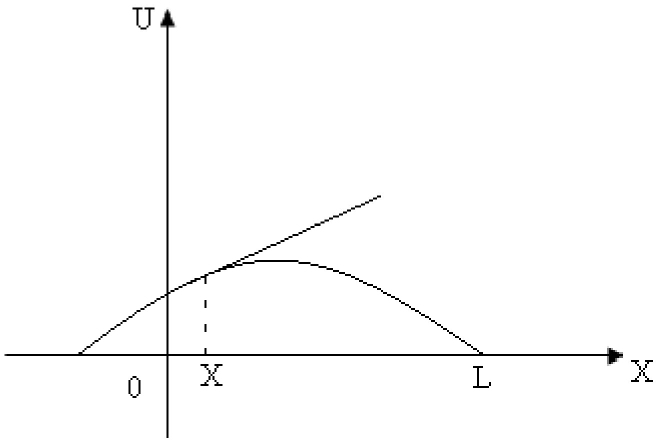
پاسینۍ معادله د لاپلاس معادله ده چې حل یې هر یوه ټاکلې هارمونیک تابع کیدای شي یعنې، که $f(x,y)$ هارمونیک وي پدې صورت کې $f(x,y)$ د پاسینۍ معادلــه حــل دی؛ نــو : $f(-2x+y,-x)$ د لــومړنۍ معادله حل دی. د راکړل شوې معادلې خصوصي حل په لاندې ډول دی.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow f(x,y) = \ln\left[(y-2x)^2 + x^2\right]$$

په فزیکي شکل د دویم مرتبه قسمي تفاضلي معادلو څیړل

د یوه اهتزاز کوونکی تړانګې د اهتزاز معادله

تعریف : مهتززه تړانګه یا اهتزاز کوونکی تار عبارت له هغه جامد جسم څخه دی چې طول یې نسبت نورو ابعادو ته ډېر زیات وي.



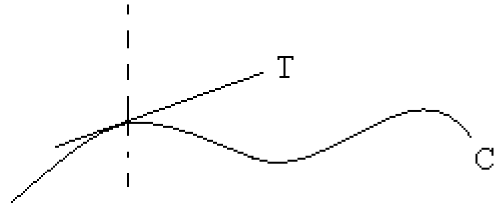
د اهتزاز د منځ ته کیدو لپاره لاندې شرایط په پام کې نیسو یعنې د ریاضي مودل (نمونه) د تار اهتزازونه تشکیلوي داسې چې :

د تار ټولې برخې او نقطې د افقي ox محور پرمخ په حرکت کې دي (یا په بله ژبه د تار عرضاني اهتزازونه په پام کې نیسو).

د تار ټول اهتزاز په uox مستوي کې دي.

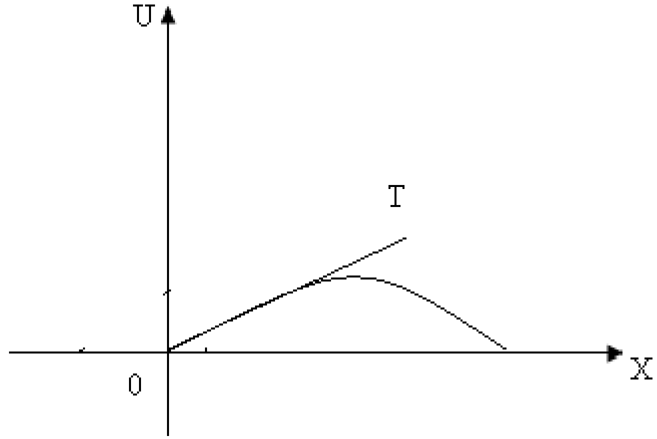
تار ارتجاعي خاصیت لري (په بل عبارت د هوک قانون ته رښتنی (صادق) دی).

تار د کج کيدو وړتيا هم لري يعني تار د کج کيدو په صورت کې خپل مقاومت له لاسه نه ورکوي نو په داسې نقطو کې د مماس قوې د رسمولو امکان لکه په شکل کې چې ليدل کيږي، شته.



په بله ژبه د تار په اوږدو کې د کشولو قوه دومره ډېره ده چې د نورو ټولو قوو څخه بايد سترګې پټې کړو.

د تار عرضاني اهتزاز وړوکی فرضوو يعني هغه مماس زاويه چې د x محور سره جوړيږي مربع يې صفر ده $\alpha^2 \approx 0$ او له هغه سترګې پټيږي.



$$\alpha \approx 0 => \sin\alpha = \alpha => \tan\alpha \approx \sin\alpha$$

د رياضي له انالیزه پوهيږو چې:

$$\sin = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \sin\alpha(x) \approx \alpha(x)$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha}{2}) = \alpha(\frac{\alpha}{2})^2 \approx 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1$$

$$\tan\alpha - \sin\alpha = \tan\alpha(1-\cos\alpha) \approx 0 \Rightarrow \tan\alpha \approx \sin\alpha$$

تار داسې متجانس دی چې کثافت يې $\rho(x)$ دی.

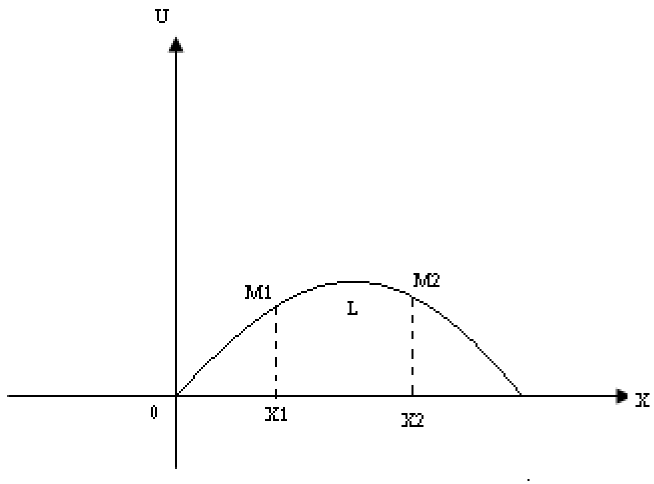
په مستوي (سطح) د قوې اهتزازونه عمودي عمل کوي، په دې حالت کې هغه قوه چې عمل کوي په $g(x,t)$ يې ښيو که دغه قوه د تار وزن وي، په دې صورت کې بيا هم $g(x,t)$ د وخت پورې اړوند دي او $g(x,t) = -\rho.g$ کيږي، g د ځمکې د جاذبې تعجيل دي او ρ د هغې قوې کثافت دی چې پورته لور ته عمل کوي نو ځکه مثبت مو نيولی.

له محيطي قوې څخه چې د تار په اهتزاز اغيزې پرې باسي تېرېږو.

فرضاً $U(x,t)$ له تعادل حالت څخه د تار اهتزاز وښيی نو: $\tan\alpha = \frac{\partial u}{dx}$

او $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 \approx 0$.

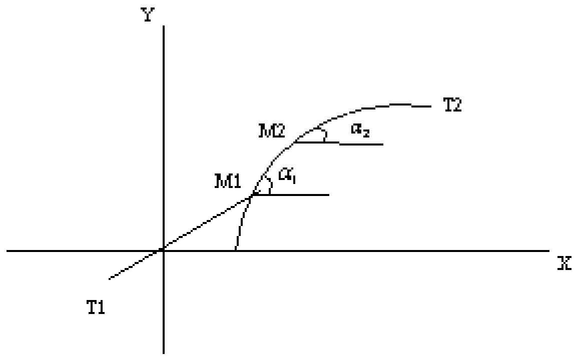
په دواړو ټاکلو نقطو کې د تار له اوږدوالي څخه صرف نظر کوو يعني تار د اهتزاز پرمهال لږ او ډېر کيږي.



$$\int_{x1}^{x2}\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}\,dx = x_2 - x_1$$

د کش کیدو قوه د اهتزاز پرمهال تل ثابت ده، د تار یوه برخه چې د M_1 او M_2 ترمنځ واقع ده په پام کې نیسو، د ټولو هغو قوو مرتسمونه چې په تار عمل کوي د y محور پرمخ یې په پام کې نیسو.

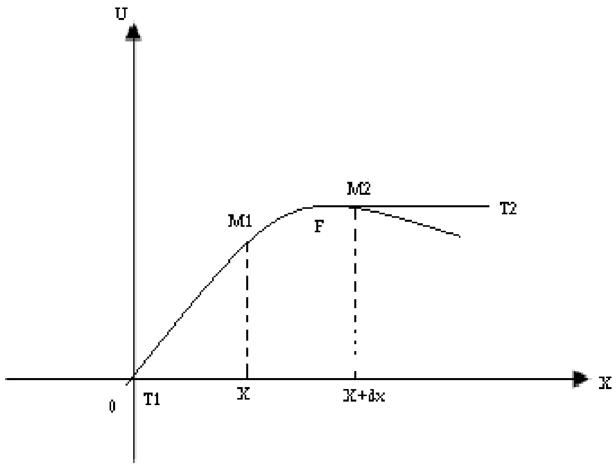
داسې چې T_1 او T_2 د کش کیدو قوه وي.



$$-T\cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 = 0$$

$$T_1 = T_2 = const$$

د اهتزاز د منځ ته راتلو ټول امکانات مو وڅیړل، اوس خپله د اهتزاز معادله ترلاسه کوو.



برېنډه ده چې $T_1 = T_2 = T_0 = const$ ، ددغې قوو د مرتسمونو مجموع د ox محور پرمخ په پام کې نیسو.

$$-T_0\sin\alpha_a + T_0\sin\alpha_2 = T_0(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$$= T_0(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1) = T_0(\tan\alpha(x+\Delta x) - \tan\alpha(x))$$

$$= T_0(u'_x(x+dx,t) - u'_x(x,t)) = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

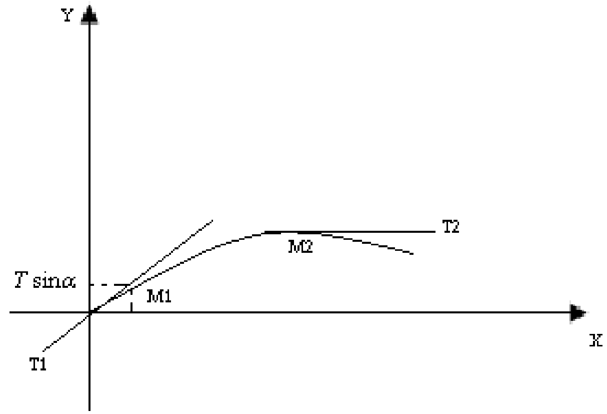
$$\tan\alpha = u'_x$$

ټولې هغه بهرنۍ قوې چې د M_2, M_1 په شاوخوا کې عمل کوي په f یې ښیو.

$f = g(x,t)dx$

د نيوتن د دويم قانون له مخې ($f = ma$) کولی شو اهتزازونه ترلاسه کړو.

$$f = g(x,t)dx = g(x,t)\overline{M_1M_2} \quad (\overline{M_1M_2} = dx)$$



$$f = g(x,t)dx = g(x,t)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\overline{M_1M_2} = \rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + g(x,t)dx$$

$$f = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + g(x,t)dx\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{g(x,t)}{\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) معادله د تار د اهتزاز دوه بعدي معادله ده، که $g(x,t)$ بهرنۍ قوه وي نو لرو چې $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ داسې چې $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ د خپلواک اهتزازونو معادله ده.

لومړني او سرحدي شرايط

لومړني شرايط: لومړني شرايط دا وايي چې په $t = 0$ شيبه کې تار په کوم شکل واقع وو او خو عمومي شکل يې عبارت دی: $u(x,t)|_{t=0} = f(x)$

او د تار سرعت پدې شيبه کې چې د لومړي مشتق څخه عبارت دي داسې ليکو:

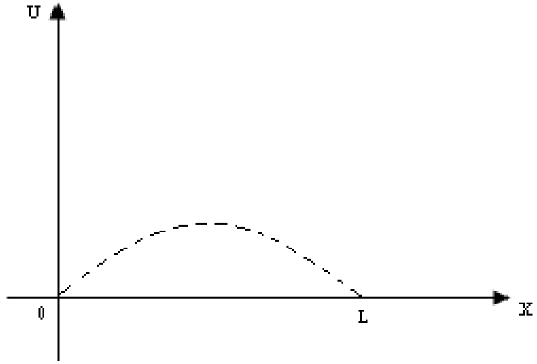
$$u'_t(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)$$

يا په بل عبارت: $u(x,0) = f(x) \quad , \quad u'_t(x,0) = f(x)\cdots\cdots(5)$

سرحدي شرايط: سرحدي شرايط دا وايي چې په t ټاکلي شيبه کې د تار دوې وروستۍ برخې (انجامونه) په کوم حالت کې وي؛ نو طبعاً چې د ډېرو بېلابېلو حالاتو امکان شته، خو داسې يو حالت په پام کې نيسو چې تار په دوو نقطو کې تړلی شوی وي.

د دلامبر د اهتزاز د معادلې ترلاسه کول

اوس د دلامبر پرنیسپ په مرسته د تار اهتزاز، سرحدي شرایطو ته یې په کتو سره د لاندې شکل په کمک په لاندې ډول ترلاسه کوو.



$u(0,t)=0$ او $u(l,t)=0 \quad \cdots\cdots 1$.

فرضاً تار عرضي اهتزاز او $\rho(x)$ کثافت ولري، او عامله قوه د x_1 او x_2 ترمنځ وي؛ نو :

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1=\tan^2\alpha}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

$T_1 = T_2 = T_0$ او $-T_1\sin\alpha_1, T_2\sin\alpha_2 \cdots\cdots(2)$.

د (1) او (2) رابطو پواسطه لیکلی شو.

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - T_0\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x-x_1} = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

له دې چې : $T_1 = T_2 = T_0$ دی؛ نو : $T_{(x)} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - T_{(x)}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}$

تار هغه مهال د تعادل حالت غوره کوي، چې لاندې رابطه صدق وکړي.

$$\Rightarrow \int_{x1}^{x_2}\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x)\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x) = 0$$

(7) رابطه دتعادل معادله ده داسې حال کې چې تارعرضاني اهتزاز ولري.

له دې چې د تار طول مو ثابت فرض کړی وو؛ نو د دلامبرد دینامیک له قانون څخه لرو چې :

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

له (3) رابطې څخه پوهیږو چې $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ ده.

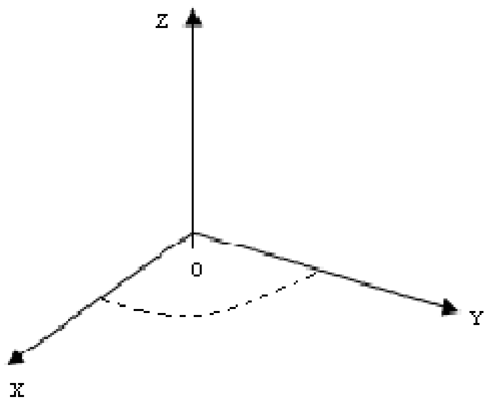
پاسینی معادله دلامبر لومونوف په 18 مه پیړۍ کې ترلاسه کړه.

د میمبران $(Memebran)$ د اهتزاز معادله

تعریف : میمبران هغه نازکه پرده ده چې ارتجاعي او د کش کیدو وړتیا لري او مقاومت یې نشي شلولی.

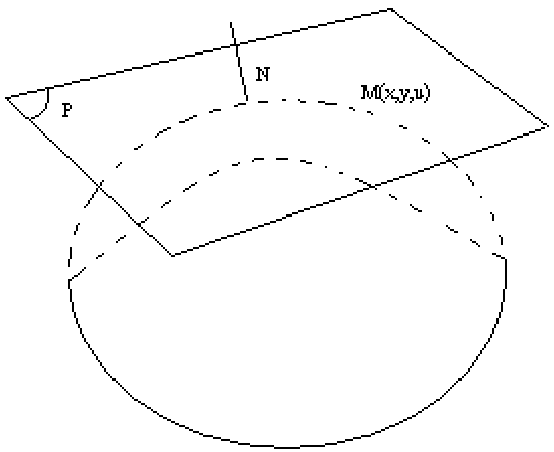
فرضاً $t = 0$ داسې واقع ده.

واړه عرضاني اهتزازونه یې په پام کې نیسو ، له تعادل حالت څخه د میمبران انحراف په $u(x,t)$ شکل ښیو ، پدې صورت کې $u(x,y,t)$ تابع په t لحظه کې د میمبران اهتزاز ښیي.



اوس واړه عرضاني اهتزازونه درپیژنو ، څرګنده ده چې د مستوي معادله په $M(x,y)$ نقطه کې په سطحه مماس ده؛ نو یاده معادله عبارت ده له :

$$z - z = f'_x(x - x_0) + (y - y_0)$$



او یا : $u = u(x,y,t_0) \Rightarrow u - u = \frac{\partial u}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y - y)$

نارمل معادله یې : $\vec{N} = \{-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial x}, 1\} = -\frac{\partial u}{\partial x} i - \frac{\partial u}{\partial y} j + 1k$

د ګرادیانت په شکل : $\overrightarrow{gradu} = (\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + k)$

او د نارمل د جهت کوساینونه په لاندې ډول دي :

$$\cos\alpha = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}} = \frac{n_x}{|\bar{n}|} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2}} = \frac{n_z}{|\bar{n}|}$$

$$\cos\beta = \frac{n_y}{|\vec{n}|}$$

له دې چې میمبران واړه اهتزازونه لري؛ نو له دې وجهې γ دوه مخې زاویه وړه ده.

نو $\cos\gamma = 1$ نو له (2) فورمول ترلاسه کیږي:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2}} = N = 1 \Rightarrow (\frac{\partial u}{\partial x})^2 = 0 \;\wedge\; (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \approx 0$$

نو:

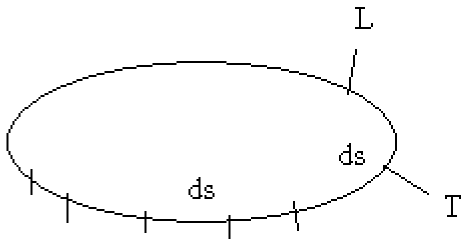
$$\cos\alpha = -\frac{\partial u}{\partial x}, \cos\beta = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow |\vec{N}| = 1$$

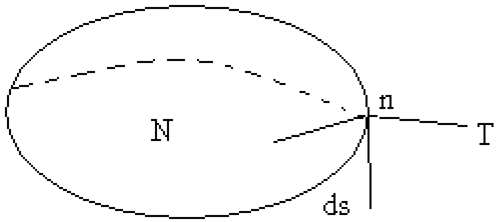
د t ټاکلې شیبې لپاره د میمبران د سطحې مساحت عبارت دی له:

$$S = \iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2}\, dxdy \approx \iint_D dxdy$$

نو د میمبران د مساحت له بدلون څخه سترګې پټوو، د میمبران یوه داسې برخه په پام کې نیسو چې د c محیط پواسطه راچاپیر شوي وي، له دې چې میمبران ارتجاعي ځانګړتیا لري او د مقاومت سره نه شلیږي پدې صورت له هغې قوې څخه چې په یوه برخه یې عمل کوي سترګې پټیږي.

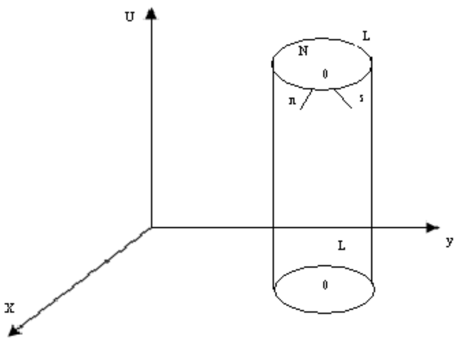
په c محیط، د کش کیدو (کششي) قوه مماس او په همدې وخت کې عمود هم دی پرې (د میمبران په سطحه) او فرضوو چې دغه کششي قوه په ټولو برخو کې یوشان ده.





یعنې د کش کېدو قوه د سطحې سره نېغ په نېغه تړاو لري، Tds له دې چې د اهتزاز په وخت کې د سطحې له ډېرېدو څخه صرف نظر شوی؛ نو $T = T_0 = \cos t$ ده، هغه قوه چې میمبران په تعادل حالت کې ساتي ترلاسه کوو.

$$\vec{N} = (-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1) \quad , \quad \vec{ds} = d\,\vec{xi} + d\,\vec{yi} + d\,\vec{uk} = \vec{dn}$$



د وکتوري ضرب وروسته لرو :

$$\vec{n} = \vec{ds}\times\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & du \\ \frac{-\partial u}{\partial x} & \frac{-\partial u}{\partial y} & 1 \end{vmatrix}$$

د n وکتور طول عبارت دی له : $|\vec{n}| = |\vec{ds}||\vec{N}|\sin 90^0 = ds$ نو $\vec{T}ds = Tn$ کیږي، T عبارت ده له $\vec{T} = |\vec{T}|\vec{n} = Tn$ د ou محور پرمخ د کش کېدو قوې مرتسم ترلاسه کوو نو عبارت دی له : $Tn\vec{k} = (-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy)T$

اوس که دغه قوه په ټول L محیط عمل وکړي؛ نو :

$$R = T\oint_l -\frac{\partial u}{dy}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

د انتیګرال لاندې افاده یوازې د x او y تابع ده؛ نو دغه انتیګرال د ګرین د فورمول په اساس مساوي دی په :

$$R = T\oint_l -\frac{\partial u}{dy}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = \iint_D (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy$$

اوس هغه برخه ټاکو چې dy مساحت ولري، په L کې هم هماغه dy دی ځکه د سطحې له ډېرېدو مو سترګې پټې کړې.

د dy سطحې کثافت په ρ ښیو، د ټاکلې سطحې تعجیل $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ او کتله یې ρdy ده، که د دوه ګوني انتیګرال فورمول ته د منځنۍ قیمت قضیه وکاروو؛ نو هغه قوه چې په dy عمل کوي عبارت ده له :

$$R = T(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dy$$

که د نیوټن دویم قانون په dy سطحه د حرکت پرمهال تطبیق کړو نو لرو :

$$f = m.a$$

$$\rho dy\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dy$$

$$\Rightarrow (\frac{T}{\rho} = a^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

وروستی رابطه په عرضاني اهتزاز کې د میمبران د اهتزاز معادله ده.

لومړني او سرحدي شرایط

که میمبران په $t = 0$ شیبه کې په تعادل حالت کې وي پدې صورت کې لومړني شرایط یې عبارت دي له : $u'_x(x, y, 0) = 0$ $u(x, y, 0) = 0$

په سرحدي شرایطو کې که د میمبران وروستۍ برخې (انجامونه) تړلي وي پدې صورت کې سرحدي شرایط د t ټاکلې شیبې لپاره عبارت دی له :

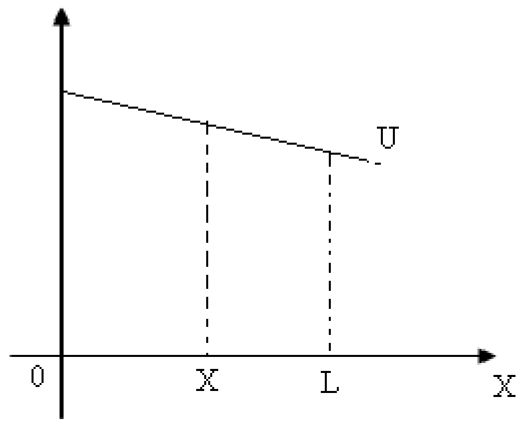
$$u(x, y, t)\big|_{t=0} = 0$$

د تودوخې د لیږد (انتقال) د معادلې جوړول

د تودوخې خطي لیږد

یوه متجانسه میله په پام کې نیسو چې یوازې جانبي سطحه یې د تودوخې عایق وي او طول یې L وي، له دې چې میله متجانسه او نروڅکې (نرۍ) ده؛ نو د میلې په هره عرضي نقطه کې د تودوخې لیږد یو شان دی.

فرضاً $u(x,t)$ تابع په x واټن او t شیبه کې تودوخه ښیي نو څرګنده ده چې په نرۍ او متجانسه میله کې د تودوخې لیږد د خطي قانون په اساس بدلون کوي.



$$u = u_a + \frac{u_2 - u_1}{l}\Delta x = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}x = u_1 + \frac{bu}{bx}x$$

(پاسینۍ معادله $y = kx + b$ شکل لري).

په تجربي ډول ترلاسه شوه چې د s مقطع څخه د تودوخې لیږد د وخت پر واحد عبارت دی.

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}\delta$$

د وخت پر واحد د تودوخې مقدار دی، داسې چې k د تودوخې د هدایت ضریب دی چې د بېلابېلو اجسامو لپاره بېلابېل قیمتونه لري.

د تودوخې د لیږد د معادلې جوړولو لپاره فزیکي قانون

1. د فوریه قانون هغه مقدار تودوخه چې په dt وخت کې له s مقطع څخه تیریږي، د لاندې رابطې په مرسته یې ښیي.

$$dQ = qsdt$$

($q = -k\frac{\partial u}{dx}$ د تودوخې د لیږد کثافت دی).

له (3) رابطې څخه د (2) رابطې د تجزیې په اساس ترلاسه کیږي.

$$q = \frac{dQ}{sdt} \Rightarrow Q = \int_{t_1}^{t_2} qdt$$

2. د m کتلې Δu د تودوخې درجې د بدلون لپاره اړین مقدار تودوخه عبارت ده له :

$$Q = Cm(u_2 - u_1) = Cm\Delta u$$

Q اړین مقدار تودوخه په یوه لحظه کې ده، $m = \rho . v$ د جسم کتله ده او m تودوخیز ظرف دی.

$(\Delta t = t_2 - t_1)$

$$(a) \quad Q = \int_{t_1}^{t_2} C\rho v \Delta u dt \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

د میلې په یوه برخه کې د تودوخې مقدار عبارت دی له :

$$(b) \quad \Delta x = x_2 - x_1 = Q = \int_{x_1}^{x_2} C\rho V \Delta u dx \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

د تودوخې د لیږد پرمهال دوه امکانه راپیدا کیږي :

1. کیدای شي داسې یوه منبع منځ ته راشي چې د تودوخې د لیږد پروسه سوکه (ورو) کړي.

2. کیدای شي د تودوخې د لیږد پروسه تېزه کړي، فرضاً د تودوخیز منبع کثافت د $f(x,t)$ تابع په مرسته وښودل شي، پدې صورت کې په هغه واټن کې چې په پام کې نیول شوې د تودوخې مقدار عبارت دی له :

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} SF(x,t) dxdt \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

د تودوخې د لیږد د انتیګرال معادله

د تودوخې د لیږد د انتیګرال د جوړولو لپاره په $\Delta x = x_2 - x_1$ واټن کې، $\Delta t = t_2 - t_1$ وخت په پام کې نیسو، له یوې خوا هغه مقدار تودوخه چې د تودوخې د درجې د بدلون لپاره اړتیا ده ورته عبارت ده له :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c\rho v \Delta u dxdt$$

وروسته له اختصار کولو څخه لاندې رابطه ترلاسه کیږي.

$$S\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c\rho \Delta u dxdt = -S\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} K \frac{\partial u}{\partial x} dtdx + S\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x,t) dxdt$$

$$-S\int_{x1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x} dtdx + S\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x_1 t) dxdt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} C\rho \Delta u dxdt = -\int_{x1}^{x_2} \int_{t1}^{t_2} K \frac{\partial u}{\partial x} dtdx + S\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x,t) dxdt$$

د ګرین تابع :

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy$$

د دیفرانسیل په شکل د تودوخې د لیږد معادله

د منځني تطبیق، د معینې ډیریدنې فورمول $\Delta x = x_2 - x_1$ او له (7) انتیګرال څخه ترلاسه کوو چې:

$$[\,]\left.K\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.K\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\Big]\Delta t + F(x,t_1)\Delta x\Delta t = \{C\rho[u(x,t_2)-u(x,t_1)]\Delta x\}$$

له دې ځایه ترلاسه کوو:

$$\frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial u}{\partial x})\Delta t\Delta x + F(x,t_1)\Delta x\Delta t = vc\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\Delta t$$

پاسینۍ رابطه د تودوخې د خطي لیږد د معادلې عمومي شکل دی؛ نو خصوصي حالات یې په پام کې نیسو.

که $\rho, k = const$ ، vc وي په دې صورت کې میله متجانسه ده او د تودوخې د لیږد معادله یې عبارت ده له:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + yf(x,t), a^2 = \frac{k}{c\rho v}, f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho v}\dots\dots(10)$$

که له بهرني تودوخیز منابعو څخه صرف نظر وشي په هغه صورت کې لاندې رابطه ترلاسه کیږي.

$$U_t = a^2U_{xx}$$

که د تودوخیز منابعو کثافت د تودوخې مربوط وي، پدې صورت کې د نیوټن دویم قانون تطبیق کوو، د نیوټن قانون هغه مقدار تودوخه چې د وخت پر واحد او د میلې د طول پر واحد له لاسه ورکول کیږي داسې بیانوي.

$$Q = F_0 = h(u-\theta)$$

$\theta = (x,t)$ تودوخیز ثابت دی، h د میلې تودوخه په څیړل شوې مقطع کې ښیي او u محیطي تودوخه ده، پدې صورت کې د تودوخیز منابعو کثافت د لاندې فورمول په مرسته تعینیږي.

$$F(x,t) = F_1(x,t) - h(u-\theta)$$

داسې حال کې چې $F_1(x,t)$ بله تودوخیزه منبع ده پدې اساس که میله متجانسه وي؛ نو د تودوخې د لیږد معادله یې عبارت ده له:

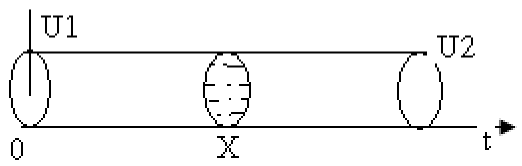
$$U_t a^2 u_{xx} - \alpha_n + \frac{f_1(x,t)}{c\rho}\dots\dots\dots(12)$$

په داسې حال کې چې: $\alpha = \frac{h}{c\rho}, f(x,t) = \alpha\theta(x,t) + \frac{f_1(x,t)}{c\rho}$

د تودوخې د لیږد د معادلې جوړول

1. یوه داسې میله چې له څو مقطعو څخه جوړه شوې وي په پام کې نیسو، هغه مقدار تودوخه چې د وخت په واحد له هغه مقطع څخه چې په x واټن کې پرته ده، تیریږي، د فوریه د قانون په مرسته یې داسې لیکو:

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\delta dt$$



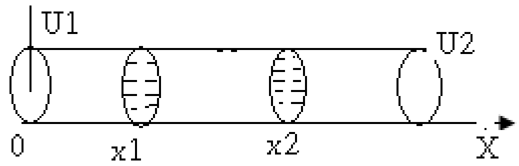
که چیرې تودوخه د خطي قانون په اساس په میله کې جریان ولري او په O نقطه کې د تودوخې درجه u_1 او په L نقطه کې د تودوخې درجه u_2 وي، پدې صورت کې u_1 د تودوخې درجه د u_2 تودوخې درجې په پرتله ډیریږي؛ نو کولی شو ولیکو:

$$Q = -\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{l} = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

2. هغه بهرنۍ مقدار تودوخه چې یوه جسم ته ورکړل کیږي د لاندې فورمول پواسطه یې ښیو.

$$Q_2 = s\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dtdx$$

داسې چې $F(x,t)$ د وخت پر واحد د تودوخې د منبع کثافت ښیي اوس غواړو د تودوخې مقدار په $\Delta t = t_2 - t_1$ شیبه او $\Delta x = x_2 - x_1$ واټن کې ترلاسه کړو.



هغه مقدار تودوخه چې د هغې مقطع څخه چې x_2 واټن لري تیریږي عبارت ده له:

$$Q_{x_2} = -S\int_{t_1}^{t_2} k(x)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}dt$$

هغه مقدار تودوخه چې په $x_2 - x_1$ واټن کې ترلاسه کیږي عبارت ده له:

$$Q_1 = -S\int_{t_1}^{t_2} k(x)[\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}]dt = Q_{x_2} - Q_{x_1}$$

3. له دې چې $Q_1 + Q_2 = Q_3$ هغه مقدار تودوخه ده چې په Δt واټن کې د Δx د تودوخې د بدلون لپاره اړینه ده په حقیقت کې Q_3 د تودوخې ناڅاپه (تصادفي) معادله ده چې د لاندې فورمول په مرسته ښودل کیږي.

$$Q_3 = cm\Delta u = c\rho v[u(x,t_2) - u(x,t_1)) = c\rho s[u(x,t_2) - u(x,t_1)]\Delta x$$

که چیرې میله متجانسه او په میله کې د تودوخې خپریدا یوشان وي؛ نو پاسینۍ معادله ورته صادقه ده.

خو که چیرې متجانسه نه وي او د تودوخې خپریدا یوشان نه وي په هغه صورت بیا لاندې فورمول کاروو.

$$Q_3 = S\int_{x_1}^{x_2} c\rho(x)[u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx$$

که چیرې په $Q_1 + Q_2 = Q_3$ معادله کې د Q_1 او Q_2 قیمتونه واچوو؛ نو:

$$\int_{t_1}^{t_2} k(x)[\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}]dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dxdt$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} c\rho(x)[u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx$$

د بېلېدنې میتود

که څه هم تراوسه مو د بېلېدنې طریقې د تفاضلي معادلو په حل کې وکارولې خو په پراخه توګه مو تر څېړنې لاندې نه دي نیولي نو اړینه ده چې دغه میتود په جامع توګه د څو مثالونو سره ترضیح کړو، فرض کړې د معادلې z حل د لاندې رابطې په شکل لیکو:

$$z(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

چې په کې X د x پورې اړند؛ خو د y څخه خپلواک تابع ده، Y د y پورې اړوند؛ خو د x څخه خپلواکه تابع ده؛ نو له دې تابع ګانو څخه قسمي مشتقونه نیسو او په اصلي معادله کې یې وضع کوو.

$$f(x)=G(y)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

له دې چې د (1) معادلې ښۍ خوا د y تابع ده خو کیڼه خوا یې یوازې د x تابع ده او دغه رابطه د x او y ټولو قیمتونو ته برقراره ده؛ ځکه (1) مساوات یوازې هغه مهال ممکن دی چې د (1) رابطې دواړه خواوې د ټولو x او y لپاره ثابت قیمت ولري؛ یعنې:

$$f(x)=G(y)=\lambda$$

دغه دوې معادلې په دوو معمولي تفاضلي معادلو اوړي، د ساري په توګه: د لاپلاس د معادلې حل د بېلېدنې په طریقه پرته له سرحدي او لومړنیو شرایطو څخه یې تربحث لاندې نیسو.

مثال: لاندې معادله حل کړۍ؟

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

حل:

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)\cdot Y(y)\quad,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)\cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=X(x)\cdot Y'(y)\quad,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X(x)\cdot Y''(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X''(x)\cdot Y(y)+X(x)\cdot Y''(y)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda\Rightarrow X''(x)-\lambda X(x)=0\quad,\quad Y''(y)+\lambda Y(y)=0$$

څو حالته منځ ته راځي:

لومړی حالت: فرض کړې $0>\lambda$ وي په دې اساس د $\lambda=-a^2\Rightarrow\sqrt{-\lambda}=a$ په فرضولو سره دوې ثابت ضریب لرونکې خطي مرتبه دویمې تفاضلي معادلې راڅرګندیږي، چې په اسانۍ حل کېدونکې دي.

$$X''(x)+a^2X(x)=0\Rightarrow X(x)=A_1\cos ax+A_2\sin ax$$

$$Y''(y)-a^2Y(y)=0\Rightarrow Y(y)=B_1e^{ay}+B_2e^{-ay}$$

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)=(A_1\cos ax+A_2\sin ax)(B_1e^{ay}+B_2e^{-ay})$$

دویم حالت: که $\lambda = 0$ وي؛ نو دوې دویم مرتبه تفاضلي معادلې به ولرو که دغه معادلې لومړی حل او وروسته یې له یو بل سره ضرب کړو د معادلې حل ترلاسه کیږي:

$$X''(x)=0 \quad , \quad Y''(y)=0$$

$$X(x)=A_1x+A_2 \quad , \quad Y(y)=B_1y+B_2$$

$$u(x,y)=(A_1x+A_2)(B_1y+B_2)$$

دریم حالت: که $\lambda > 0$ فرض شي $\lambda = a^2$ بیا هم دوې خطي دویم مرتبه متجانسې تفاضلي معادلې راڅرګندیږي که حلونه یې سره ضرب کړو د معادلې حل ترلاسه کیږي:

$$X''(x)-a^2X(x)=0 \Rightarrow X(x)=A_1e^{ax}+A_2e^{-ax}$$

$$Y''(y)+a^2Y(y)=0 \Rightarrow Y(y)=B_1\cos ay+B_2\sin ay$$

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)=(B_1\cos ay+B_2\sin ay)\left(A_1e^{ax}+A_2e^{-ax}\right)$$

مثال: لاندې معادله د سرحدي شرایطو سره حل کړئ ؟

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial y} \quad , z(0,y)=8e^{-3y}$$

حل:

$$z(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=X'(x)\cdot Y(y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=X(x)\cdot Y'(y)$$

$$\frac{X'(x)}{4X(x)}=-\frac{Y'(y)}{Y(y)}=\lambda \Rightarrow X'(x)-4\lambda X(x)=0 \quad , \quad Y'(y)-\lambda Y(y)=0$$

$$X(x)=Ae^{4\lambda x} \quad , \quad Y(y)=Be^{\lambda y}$$

$$z(x,y)=ABe^{\lambda y}e^{4x\lambda}=BAe^{\lambda(y+4x)}=ke^{\lambda(y+4x)}$$

$$z(0,y)=ke^{\lambda y}=8e^{-3y} \quad , \quad \lambda=-3 \quad , \quad k=8$$

$$z(x,y)=8e^{-3(4x+y)}$$

مثال: لاندې معادله د لومړنیو او سرحدي شرایطو سره حل کړئ، داسې چې:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0<x<3 \quad , \quad t<0$$

$$u(0,t)=u(3,t)=0$$

$$u(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x \quad , \quad |u(x,t)<M|$$

حل: که $u(x,t)$ د معادلې حل وي؛ نو: $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)\cdot T(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)\cdot T(t) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}=X(x)\cdot T'(t)$$

د لومړنیو شرایطو په پام کې نیولو سره چې د ساین تابع ده؛ نو ثابت عدد باید منفي وي.

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{2T(t)}=-\lambda^2$$

$$\frac{T'(t)}{2T(t)}=-\lambda \Rightarrow T'(t)+2\lambda T(t)=0 \Rightarrow T(t)=c_1e^{-2t\lambda^2}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2 \Rightarrow X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \Rightarrow X(x)=A_1\cos\lambda x+A_2\sin\lambda x$$

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=c_1e^{-2t\lambda^2}\left(A_1\cos\lambda x+A_2\sin\lambda x\right)$$

$$=e^{-2t\lambda^2}\left(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\right)$$

$$u(0,t) = Ae^{-2t\lambda^2} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u(x,t) = Be^{-2t\lambda^2}\sin\lambda x \Rightarrow u(3,t) = Be^{-2t\lambda^2}\sin 3\lambda$$

$$B = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \Rightarrow \sin 3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = k\pi \Rightarrow \lambda = \frac{k\pi}{3} \quad , \ (k = 1,2,3,\cdots)$$

$$u(x,t) = Be^{\frac{-2tk^2\pi^2}{9}}\sin\frac{k\pi x}{3} \quad , \quad (k = 1,2,3,...)$$

څرګنده ده چې لاندې حل د k بېلابېل قيمتونو لپاره ددغې حلونو ترکيب دی.

$$u(x,t) = B_1 e^{\frac{-2tk_1^2\pi^2}{9}}\sin\frac{k_1\pi x}{3} + B_2 e^{\frac{-2tk_2^2\pi^2}{9}}\sin\frac{k_2\pi x}{3} + B_3 e^{\frac{-2tk_3^2\pi^2}{9}}\sin\frac{k_3\pi x}{3}$$

اوس لومړني شرايط تطبيق کوو څو B_2, B_3 او B_1 ضريبونه ترلاسه کړو :

$$u(x,0) = B_1\sin\frac{k_1\pi x}{3} + B_2\sin\frac{k_2\pi x}{3} + B_3\sin\frac{k_3\pi x}{3}$$

$$u(x,t) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$$

$$B_1 = 5 \, , \, B_2 = -3 \, , \, B_3 = 2 \quad , \quad k_1 = 12 \, , \, k = 24 \, , \, k = 30$$

$$u(x,t) = 5e^{-32t\pi^2}\sin 4\pi x - 3e^{128t\pi^2}\sin 8\pi x + 2e^{-200t\pi^2}\sin 10\pi x$$

تمرين

لاندې معادلې د بېلېدنې په طريقه د سرحدي شرايطو په شتون کې يې حل کړئ ؟

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad u(x,0) = 4e^{-x}$

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial y} + u \quad , \quad u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u(0,t) = 0 \, , \, u(\pi,t) = 0 \, , \, u(x,0) = 2\sin 3x - 4\sin 5x$

4. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2u \quad , \quad u(x,0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$

د فوریه $(Fourier)$ لړۍ

د تایلور د لړیو (د طاقت د لړیو) په اړه تر یوه بریده معلومات لري اوس غـواړو مثلثاتي ډوله لړۍ چې $f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ شکل لري در وپیژنو.

پاسینۍ لړۍ د فزیک په مسئلو کې په ځانګړي ډول په اهتزازونو د تناوب جریان او داسې نورو ځایونو کې په پراخه توګه کاریږي، په پاسینۍ لړۍ کې $\cos kx$ او $\sin kx$ تابع ګانې ډېر اهمیت لري، پاسینۍ لړۍ د فوریه د لړۍ په نامه یادیږي.

$$s_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

پاسینۍ رابطې او لړۍ ته مثلثاتي پولینوم هم وایي، پاسینۍ پولینوم پریودیک دی او پریود یې 2π دی.

یادونه: که چیرې φ_n د مثلثاتي توابعو یو سیستم وي؛ نو پدې صورت کې:

1. φ_n ته ارتوګونال $(Orthogonal)$ سیستم وایي هغه مهال چې:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0 \quad , \quad m\neq n$$

2. φ_n ته ارتونورمال $(Orthonormal)$ سیستم وایي هغه وخت چې:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2{}_n(x)dx=1$$

مثال: لاندې مثلثاتي سیستم، ارتوګونال سیستم جوړوي.

$$i.\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n>0\\ 2 & m=n=0\end{cases}$$

$$ii.\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n>0\\ 0 & m=n=0\end{cases}$$

$$iii.\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx dx=0$$

حل i. د $m=n=0$ لپاره لرو چې:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\frac{1}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=2$$

د $m=n>0$ لپاره لرو چې:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(x+\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(2\pi)=1$$

د $m\neq n$ لپاره لرو چې:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x+\cos(n-m)x dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

ii, iii برخې i برخې ته ورته ثبوت کیږي.

قضیه

که چیرې $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ راکړل شوې وي پدې صورت کې ثبوت کړئ چې :

$$i.\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$ii.\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx \quad , \quad k=0,1,2,...$$

$$i.\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx \quad , \quad k=1,2,...$$

ثبوت :

$$i.\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$i.\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos kxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_k\sin kxdx\right]$$

$$=\frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=a_0\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad \bullet$$

$$ii.\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\cos mxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos kxdx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin kxdx$$

$$=0+a_k\pi+0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx \quad , \quad m>1$$

$$iii.\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\sin mxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mxdx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos kxdx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin kxdx$$

$$=0+b_k\pi+0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx$$

$$\Rightarrow b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx \quad , \quad m>1$$

تعریف : که چیرې f تابع د 2π په اندازه پیریودیک وي او په $[-\pi,\pi]$ کې د انتیګرال نیوو وړتیا ولري پدې صورت کې :

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx \quad , \quad k=0,1,2,...$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx \quad , \quad k=1,2,...$$

اعداد د فوریه ضریبونه او خپله لړۍ د فوریه لړۍ نومیږي.

قضیه

که چیرې f تابع 2π پریودیک وي او په $[-\pi,\pi]$ کې د انتیګرال نیولو وړتیا ولري پدې صورت کې:

الف: که جفت وي د فوریه لړۍ د کوساین له جنسه شمېرو.

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$$

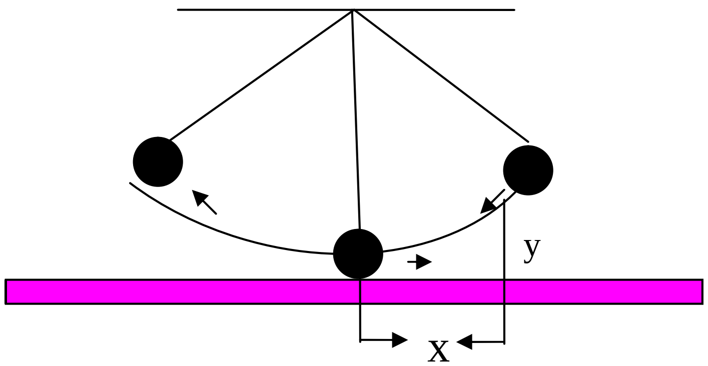
ب: که f تاق وي د فوریه لړۍ باید د ساین له جنسه وشمېرل شي.

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$$

مخکې له دې چې د فوریه په طریقه د مهتززي ترانګې د معادلې حل پیل کړو اړینه ده چې د فوریه ضریبونه او خپله د فوریه لړۍ وپېژنو، د فوریه لړۍ د لاندې رسم شوې رقاصې په مرسته ترلاسه کولی شو.

یاده لړۍ مخکې له ترلاسه کولو څخه داسې لیکې:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$



په پاسیني شکل کې ګورو هرځومره چې قوه ډېره وي د y ارتفاع هم ډیریږي نو ویلی شو چې قوه د y له عرض سره نېغ تړاو لري کله چې قوه عمل وکړي رقاصه د قوې خلاف عمل کوي نو لیکلی شو چې $f=-cy$ له بل پلوه د نیوټن له دویم قانون څخه په میخانیک فزیک کې لرو چې:

$$f = am \Rightarrow f = m\frac{dv}{dx} \Rightarrow f = m\frac{d^2y}{dx^2} = -cy \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{c}{m}y$$

له دې چې $(-c)$ ثابت دی؛ نو په کتله د تقسیم کېدو وروسته بیا هم ثابت عدد ترلاسه کیږي نو کولی شو هغه په یوه بل ثابت یعنې $k^2 = \frac{c}{m}$ تعویض کړو او په پای کې:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0 \Rightarrow y'' + k^2y = 0$$

پاسینۍ معادله دویم مرتبه خطي متجانسه معادله ده او د حل لپاره یې کولی شو له مشخصه معادلې کار واخلو:

$$y''+k^2y=0 => m^2+k^2=0 => m_{1,2}=\pm ik => m_1=0+ik, m_2=0-ik$$

له دې چې m_2 او m_1 دواړه د پاسینۍ معادلې حلونه دي، څرګنده لیدل کیږي چې m_2 منفي قیمت لري؛ خو m_1 مثبت قیمت ځانته غوره کړي، دواړه د معادلې حل کېدای شي؛ خو مونږ یې مثبت قیمت کاروو؛ نو لرو چې:

$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta\chi \wedge y_1 = e^{\alpha\chi}\sin\beta\chi$$

له بل پلوه پوهیږو چې $\alpha = o \wedge \beta = k$ ده نو لیکلی شو چې:

$$y_1 = e^{0x}\sin kx \Rightarrow y_1 = \sin kx \wedge y_2 = \cos kx$$

دې پایلې ته ورسېدو چې $y_1 \wedge y_2$ دواړه د دویم مرتبه خطي تفاضلي معادلې حل دی له دې چې د ساین ګراف له مرکز څخه تیریږي؛ نو د مطلب په حل کې خورا مرسته راسره کوي.

$$y = \sin kx$$

$$y_1' = k\cos kx \wedge y_1'' = -k^2 \sin kx => -k^2 \sin kx + k^2 \sin kx = 0$$

نو:

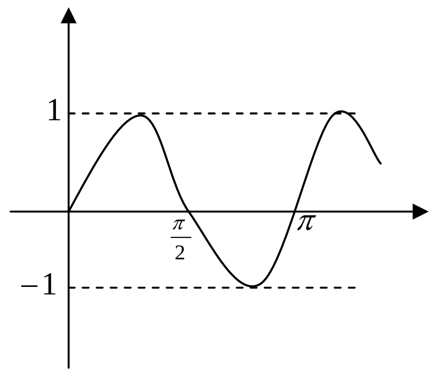
$$y_k = c_k \sin(kx + \alpha_k)$$

د پاسینۍ معادلې عمومي حل کیدای شي؛ خو له بل پلوه کولی شو ولیکو:

$$y_1 = c_1 \sin(x + \alpha_1)$$

$$y_3 = c_3 \sin(3x + \alpha_3)$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(kx + \alpha_k)$$



د معادلې په حل کې ویل شوي په $\sin(\pi + \alpha)$ کې چې α هر عدد (زاویه) کیدای شي ګراف نظر خپل اړونده قیمت ته له مبداء څخه بې ځایه کوي خو د اهتزاز لمن او امپلیتود یې هیڅ راز بدلون نه کوي.

په پای کې، له دې چې $c_0 \sin\alpha_0$ کولی شو په $a_0 = c_0 \sin\alpha_0$ تعویض کړو ځکه ثوابت دي او یا $\frac{a_0}{2}$ یې په پام کې نیسو؛ نو:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx + \alpha_k)$$

$$f(x) = a_0 + c_1 \sin(x+\alpha) + c_2 \sin(2x + \alpha_2) + c_3 \sin(3x + \alpha_3) \cdots$$

له بل پلوه کولی شو پاسینۍ مجموعه داسې وڅیړو:

$$\therefore \sin(x+\alpha) = \sin x \cos\alpha_1 + \cos x \sin\alpha_1$$

$$\sin(2x+\alpha_2) = \sin 2x \cos\alpha_2 + \cos 2x \sin\alpha_2$$

$$\sin(3x+\alpha_3) = \sin 3x \cos\alpha_3 + \cos 3x \sin\alpha_3$$

.

.

.

$$=> f(x) = a_0 + c_1 \sin x \cos\alpha_1 + c_1 \cos x \sin\alpha_1 + c_2 \sin 2x \cos\alpha_2 + c_2 \cos 2x \sin\alpha_2 \cdots$$

پدې پړاو کې لیکو چې:

$$a_1 = c_1 \sin\alpha_1, a_2 = c_2 \sin\alpha_2, a_3 = c_3 \sin\alpha_3, \cdots$$

$$b_1 = c_1 \cos\alpha_1, b_2 = c_2 \cos\alpha_2, b_3 = c_3 \cos\alpha_3, \cdots$$

نو د قیمتونو په وضع کولو سره لرو چې:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos c + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

$$=> f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ترلاسه شوې لړۍ د فوریه د لړۍ په نامه یادیږي، چې د یوې ساده رقاصې له اهتزازه چې هارمونیکي ده راپیل او په لړۍ ورختمیږي.

اوس د فوریه لړۍ ثابت ضریبونه ترلاسه کوو.

د فوریه د ثابتونو ترلاسه کول

له دې چې $\sin x$ او $\cos x$ تابع په $[-\pi,\pi]$ انټروال کې تاق او جفت پریود لري او شمېرنو کې آسانتیا راولي؛ نو ځکه انټیګرال په همدې انټروال کې په پام کې نیسو.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$\vee\ f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kc+b_k\sin kx$$

له دواړو خواوو په $[-\pi,\pi]$ انټروال کې انټیګرال نیسو.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}a_0dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kxdx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}a_0dx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx$$

$$=a_0(\pi+\pi)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\frac{1}{k})[\sin k\pi-\sin k(-\pi)]+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(-\frac{1}{k})[\cos k\pi-\cos k(-\pi)]$$

$$=a_0 2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}a_k 2\frac{1}{k}2\sin k\pi+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(-\frac{1}{k})[\cos k\pi-\cos k\pi]=2a_0\pi$$

$$\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2a_0\pi\Rightarrow a_0=\frac{1}{2\pi}\int f(x)dx\cdots\cdots(1)$$

په (1) رابطه کې د a_0 ضریبونو لپاره د انټیګرال لاندې $f(x)$ پرته تابع موجوده ده، چې په واقعیت کې دا هغه تابع ده چې د فوریه لړۍ ورته متقاربه کیږي.

د a_n ضریبونه لپاره تر ټولو دمخه د فوریه لړۍ د تابع دواړه خواوې له $\cos mx$ سره ضربوو وروسته بیا له دواړو خواوو داسې انټیګرال نیسو.

$$f(x)\cos mx=a_0\cos mx+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+\sin kx]\cos mx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=\int_{-\pi}^{\pi}a_0\cos mxdx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}[a_0\cos kx+b_k\sin kx]\cos mxdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}a_0\cos mxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[a_0\cos kx\cos mx+b_0\sin kx\cos mx]dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}a_0\cos mxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_0\cos kx\cos mxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_0\sin kx\cos mxdx\cdots(1)$$

د $\sin(x+y),\cos(x+y),\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\because\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k+m)xdx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k-m)xdx$$

$$=\frac{1}{2}(-\frac{1}{k+m})[\cos(k+m)\pi-\cos(k+m)\pi]+$$

$$+\frac{1}{2}(-\frac{1}{k-m})[\cos(k-m)\pi-\cos(k-m)\pi]=0$$

$$\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mxdx=0$$

$$\because\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+m)xdx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-m)xdx$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{k+m})[\sin(k+m)\pi+\sin(k+m)\pi]+\frac{1}{2}(\frac{1}{k-m})[\sin(k-m)\pi+\sin(k-m)\pi]$$

$$=\frac{1}{k+m}\sin(k+m)\pi+\frac{1}{k-m}\sin(k-m)\pi$$

په پاسینۍ انتیګرال کې پرته له $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-m)dx$ انتیګرال څخه پاتې ټول انتیګرالونه صفر دي او دغه انتیګرال په $k=m$ حالت کې صفر کیږي پدې صورت کې د $\cos(k-m)$ قیمت یو کیږي؛ نو پدې اساس انتیګرال یې له 2π سره مساوي کیږي.

$$\because \because \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mxdx = 2\pi$$

د (3),(4) او (1) رابطو په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = a_0\frac{1}{m}(\sin m\pi - \sin m\pi) + 2a_k\pi + 0 = 2a_k\pi$$

$$=> a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx$$

پاسینۍ طریقې ته ورته کولی شو b_k ترلاسه کړو په هغه صورت کې چې د فوریه لړۍ دواړه خواوې له $\sin mx$ سره ضرب کړو.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\sin mxdx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin mxdx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mxdx$$

د (4) رابطې په پام کې نیولو څخه $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin mxdx = 0$ کیږي.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-m)xdx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+m)dx$$

د ښۍ خوا دویم انتیګرال صفر کیږي او د ښۍ خوا لومړی انتیګرال هم کله چې $k=m$ وي صفر کیږي چې قیمت یې 2π دی په پای کې:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin mxdx = 2\pi$$

نو اوس قیمتونه وضع کوو:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mxdx + 0 + b_k 2\pi = a_0[\cos m\pi - \cos m\pi] + 2\pi b_k = 2b_k\pi$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mxdx \end{cases}$$

د ریاضي پوهانو لنډه پېژندنه

لاپلاس (*Laplace*)

پییرسیمون لاپلاس په کال 1349 کې د فرانسې په یوه بې وزله کورنۍ کې زېږېدلی، دده تر ټولو برجسته کارونه په سماوي میخانیک، احتمالاتو، تفاضلي معادلو او جیولوژي کې تر سترګو کیږي.

د لاپلاس نوم له ډېرو هغو اکتشافاتو سره ضم دي کوم چې دده خپله کشف کړي، لکه د نړۍ زیږوونکې سحابي په فرضیه، د پوتانسیل په نظریه کې د لاپلاس معادله، یا په اصطلاح د لاپلاس تبدیل، چې وروسته بیا د هوي ساید اپراتوري حساب کلي په شکل را څرګند شو او یو دیترمینانت هم دده په نوم یادیږي. لاپلاس سل کاله وروسته د ایزاک نیوټن له مړینې په 1827 کال کې مړ شو.

دده مخکې له مړینې دوه ستر اثره خپاره کړل، یو یې پنځه جلده سماوي میخانیک وو (1799 – 1825) او بل اثر یې د احتمالاتو تحلیلي نظریې په نامه یادیږي چې به 1812 کې یې خپور کړي وو او یاده دې وي چې دده ته د فرانسې د نیوټن لقب هم ورکړل شوي.

ژان لوران دلامبر (*Dalembert*)

ژان لوران دلامبر (1717-1783) په پاریس کې زیږېدلي او د مړینې ځای یې هم پاریس دی، ډېرې رسالې یې د ډینامیک او د مایعاتو تودوخیز تعادل په اړه لیکلي، ده په کال 1747 کې د یوه اثر د لیکلو پر مهال چې د مرتعش تارونو په اړه و، د قسمي مشتق لروونکو تفاضلي معادلو سره مخ شو چې وروسته بیا د همدې ډول معادلو له مخکښانو څخه ګڼل کیدو، دلامبر په 1783 کال کې د ابدي ژوند په تکل دا دنیا پرېښوده او دا هغه کال وو چې اویلر هم پکې مړ شوي وو.

ژوزف لوئي لاګرانژ (*Lagrange, Joseph – Louis*)

ژوزف لوئي لاګرانژ (1736 – 1813) د اتلسمې پېړۍ تر ټولو ستر ریاضي پوه وو، د ایتالیا تورن ښار د لاګرانژ د زوکړې ښار دی، لاګرانژ ته نسبتاً د قوي ریاضیکي شعور ورکړه او توفیق شوی وو، دده میتودونه نوي او کولي شو لومړني انالیز پوه ورته ووایو. دده کارونو د ریاضیاتو په وروستیو څېړنو کې ژورې اغیزې درلودې او لومړني ممتاز ریاضي پوه وو، چې د ریاضي د انالیز نه مقنع والي یې درک او تشخیص کړ.

دده کتاب د تحلیلي توابعو نظریې تر عنوان لاندې، چې تفاضلي حساب په بر کې لري او دوه نور اثرونه یې ټولې درجه لرونکې عددي معادلې (1767) چې رساله ده او یو تحلیلي میخانیک (1788) چې یو تل پاتې اثر دی یادولي شو، د یوې ډینامیکي دستګاه د حرکت معادلې هم چې نن ورځ د لاګرانژ د معادلو په نامه یادیږي، د لاګرانژ له کارونو څخه دي.

کارل ګوستاو ژاکوبي $(Jacobi)$

کارل ګوستاو په کال 1804 کې د پوتسدام په یوه یهوده کورنۍ کې وزیږید او په برلین پوهنتون کې یې زده کړې کړې چې په کال 1825 کې یې دوکتورا ترلاسه کړه وروسته بیا برلین ته لاړ او تر مرګه پورې (1851) په همدې ښار کې اوسیده.

ژاکوبي وروسته له کوشي، د دیترمینانت د نظریې په اړه شاید تر ټول زیات کار کړی وي، دده پواسطه دیترمینانت خپل وروستی منونکی تعریف ترلاسه کړ، ده د اعدادو په نظریې، د معمولي او قسمي تفاضلي معادلو په نظریه کې، د بدلونونو حساب، د دریو جسمونو مساله او داسې نور ډینامیکي مسایلو کې بیلابیلې څېړنې کړې.

ادرين ماري لژاندر $(Legender, Adrien – Marie)$

د لژاندر نوم د $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ دويم مرتبه تفاضلي معادلې سره چې p پکې يو ثابت حقيقي عدد دی، په دې وروستيو کې يو ځای اخيستل کيږي، ټولې هغه توابع چې په دغې معادله کې صدق کوي د p مرتبې څخه د لژاندر د توابعو په نامه يادېږي، لژاندر د فرانسې د مثلث بندۍ د بنسټيزو رياضياتو په تاريخ کې د هندسې د اصولو له وجهې په جيولوژي کې له ډېر شهرت څخه برخمن دي.

پاس ياده شوې معادله، په کروي مختصاتو کې د قسمي مشتق لروونکو تفاضلي معادلو په حل، کوانتومي ميخانيک، د الکترومقناطيس نظريه او تودوخه کې ډېره کاريږي.

لژاندر سربېره پر دې چې د هندسې د اصولو له اثر څخه چې په کال 1794 خپور شو، يو بل اثر د اعدادو د نظريې تر عنوان لاندې (1797-1798) چې په دوو جلدو يا 859 مخونو کې دي، چاپ او خپور کړ، دده يوه بله رساله په دريو جلدونو کې د اويلر انتيګرالونه او بيضوي تابع تر عنوان لاندې ده، په دې کتاب کې د (اويلر انتيګرال) اصطلاح يې د ګاما او بيټا تابع ګانو لپاره وکاروله.

ويلهم بسل $(Bessel)$

ياکوب برنولي (1705 – 1656) د يوه ځړېدلي زنځير د اهتزازي حرکت په اړه څېړنې کولې، خو وروسته بيا د فريډريک ويلهم بسل لخوا (1884 – 1846) د سيارو په حرکتونو کې وکارول شوې، وروسته له هغې د بسل د معادلو حل د يو لړ توابعو چې د بسل د تابع په نامه يادېږي په مختلفو ځايونو کې لکه د ارتجاع د وړتيا اړوند مسايل، د مايعاتو حرکت، د پوتنسيل نظريه، د څپو (موجونو) خپريدا او داسې نورو ځايونو کې وکاريدې.

ژوزف فوريه $(Furier, Joseph)$

فوريه په کال 1768 کې په اوسر ښار کې وزيږيد خو په کال 1830 کې د پاريس په ښکلي ښار کې ومړ، د ده پلار درزي وو خو په اته کلنۍ کې نور د پلار له مينې محروم شو، په. په کال 1807 کې د فرانسې په اکاډمۍ کې يوه مقاله خپره کړه، چې د رياضي په تاريخ کې يو ګټور او طلايي فصل ګڼل کيږي. ددغې مقالې موضوعات په عملي توګه په يوه ميله، پاڼه او يا فلزي اجسامو کې د تودوخې جريان په اړه و، په 1816 کال کې يې د رياضي يو ستر کلاسيک اثر چې د تودخې د خپريدو تحليلي نظريه يې بحث وو خپره کړه.

استرلينګ (*J.Stirling*)

استرلينګ (1692-1770) اسکاتلندي رياضي پوه دی، چې د مذهبي شخړو او اختلافاتو له کبله د اکسفورد له پوهنتونه وشړل شو او بيا وينز ته ولاړ او هورې يې د رياضياتو په تعلم پيل وکړ، په کال 1725 کې بيرته لندن ته ولاړو او هورې يې دديفرانسيل حساب په اړه کتاب وليکو او د استرلينګ فورمول هم چې په ډېرو برخو کې کارېږي د ده په نوم يادېږي.

سيمون پواسون (*Poisson*)

پواسون په کال 1781 کې په پيتيو ښار کې نړۍ ته سترګې وغړولې خو په کال 1840 کې په پاريس ښار کې و مړ، په رياضي کې د پواسون د خپاره شوو اثارو شمېر د 300 تر 400 جلدو پورې دي، تر ټولو مهمې رسالې يې عبارت دي له: د ميخانيک په اړه دوه جلدي رساله $(1811-1833)$، د موييين عمل معاصره نظريه (1831)، د تودوخيزې رياضي نظريه (1835)، د قضاوت د احتمال په اړه څېړنې (1837).

ده په خپلو څېړنو کې لاندې نظريې هم څېړلي (د مقناطيس او الکترستاتيک رياضي، فزيکي نجوم، معين انتيګرالونو او لړۍ).

ډېري محصلين په تفاضلي معادلو کې د پواسن د لقب، په الکترستاتيک کې د پواسون د ثابت، د پواسون انتيګرال، د پوتانشيل په نظريه کې د پواسون د معادلې او په احتمالاتو کې د پواسون د توزيع سره مخ شوي او کاملاً اشنايي ورسره لري.

ابراهم دمو اور (*A.de Moivre*)

يو له هغو کسانو څخه چې د احتمال په نظريه کې يې ډېر کارونه کړي، ابراهام دمو آور (1667-1754) دي. دمو اور د خپل قسط السنين اثر به خپرولو سره د احصايوي رياضياتو په تاريخ کې مهم نقش ولوبو، د چانس د دکترين کتاب چې ډېر نوي مطالب د احتمال د نظريې په اړه پکې و، د تحليلي جګړې اثر، چې د متناوبو لړيو، تحليلي مثلثات او احتمالاتو په اړه ليکل شوي له ځانګړي شهرت څخه برخمن دی.

د لومړي ځل لپاره د $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ احتمالاتي انتيګرال څېړل او د نورمال توزيع د منحني $y = ce^{-hx^2}$ چې $h,c = con$ سپړل چې د احصايې په مبحث کې ځانګړي اهميت لري، د دمو آور له کارونو څخه محسوبېږي.

کالين ماکلورين (*Maclaurin,Colin*)

سکاتلندي کالين ماکلورين (1696-1746) د تابع ګانو لپاره د خپلو ډېرو ګټورو لړيو له وجهې خاص ځای لري او د اتلسمې پېړۍ له مستعدو رياضي پوهانو څخه وو.

ماکلورين په هندسه کې په ځانګړي توګه د لوړو درجه لرونکو مسطح منحني ګانو کې ډېر برجسته کارونه کړي. په تطبيقي رياضي کې دده په بيلابيلو مقالو کې يوه مقاله هم د جذر او مد رياضيکي نظريې په اړه ده، چې وروسته له خپرولو څخه د جايزې ګټونکې مقاله هم وګڼل شوه.

د فلوکسيونونو په رساله کې دده څېړنې د دوو بيضوي د جذب په اړه دي، دی په يوولس کلنۍ کې ګلاسګو پوهنتون ته داخل شو، په پنځلس

کلنۍ کې یې د لیسانس څخه پورته (فوق لیسانس) تحصیلي درجه ترلاسه کړه، په نولس کلنۍ کې د ماریشال کالج د استاد په حیث وټاکل شو او په یو ویشت کلنۍ کې یې خپل لومړني اثر (ذاتي هندسه) خپور کړ.

بروک تیلر $(Taylor, Brook)$

انګلیسي بروک تیلر (1685-1731)، په کال 1717 کې د عددي معادلو د حل لپاره خپله لړۍ په څېړنیز ډول ولیکله، تیلر په لاندې موضوعګانو کې کارونه کړي: د پرسپکتیو په نظریه کې او د فوتو ګرامتري په ریاضي کې، چې اوس اوس د علم د پرمختګ سره د الوتکو په مرسته له هوا څخه د انځورونو په ویستلو سره یې عملي جامه واغوسته.

لئونهارت اویلر $(Euler, Leonhard)$

اویلر په سویس ښار کې په کال 1707 کې دې فاني نړۍ ته سترګې وغړولې، وروسته د الهي زدکړو څخه یې، خپل واقعیي استعداد او وړتیا په ریاضي کې وموندله او په دې برخه کې پلار یې چې کشیش وو او په ریاضي هم ښه پوه وو پوره مرسته ورسره کوله، پلار یې د یاکوب برنولي سره ریاضي ویلي وه او یوازینې هیله یې دا وه چې زوی یې یوهان برنولي ته د سبق ویلو ګونډې ووهي او په کال 1783 کې هغه مهال چې شپږ اویا کلن وو ومړ.

اویلر د ریاضیاتو په تاریخ کې د ریاضي په اړه ډېرې لیکنې لري او کابو په ټولو علومو کې یې نوم یادیږي، دي 530 جلده کتابونه او مقالې لري .

لوژون دیریکله $(Dirichlet)$

لوژان دیریکله په کال 1805 کې په درون ښار کې وزیږید ، او په متواتر ډول یې په برسلائو او برلین ښارونو کې د استاد په حیث دنده ترسره کړې، په 1855 کې د ګاوس د مړینې وروسته د ګاوس د ځای ناستې په توګه په ګوتینګن ښار کې وټاکل شو او دغه لقب ده ته وړ لقب وو ځکه دی د ګاوس له دایمي، مستعد او تل پاتې شاګردانو څخه ګڼل کیدو.

ده د ګاوس ډیرې ګونګ میتودونه په پوره زیار سره اسانه کړل او ده د اعدادو نظریې کې مهمه برخه درلوده، د اعدادو د نظریې درسونو کتاب کې چې د اعدادو د نظریې په اړه د ګاوس په څېړنو ترټولو یو ښه او ساده سریزه ده دده پورې اړوند ده.

دیریکله د ژاکوبي له لنډو ملګرو، زوم او د اثاره له شنونکو څخه یې وو. محصلین د ده له نوم سره په بیلابیلو برخو کې مخ کیږي لکه، د دیریکله لړۍ، د دیریکله تابع او د دیرکله اصول یادولی شو.

دغه آلماني ریاضي پوه د اعدادو په تیوري، میخانیک او انالیز په اړه کافي څېړنې کړي، د دیریکله لړۍ، د دیریکله انتیګرال او د دیریکله تابع ټول ده ته منسوب دي.

د دیریکله لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ، د دیریکله تابع $f(x)=\begin{cases}0\\1\end{cases}$ او د دیریکله انتیګرال $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ چې د $p>1$ لپاره متقاربه او د $p\le 1$ لپاره متقاربه نه ده.

هرمیت $(Ch, Hemite)$

هرمیت(1859-1937) فرانسوي رياضي پوه او د پاريس د پوهنتون استاد وو، دده مهم کارونه عبارت دي له، الجبري فورمولونه، د بيضوي تابع ګانو تيوري او د بيضوي تابع په مرسته د پنځم درجه معادلو حل او د اويلر د عدد (e) د نه ناطق والي له ثبوت څخه.

هميلتون $(Hamelton)$

هميلتون(1805-1865) ايرلندي رياضي پوه او ستور پيژندونکي وو، د ايرلند او پترزبورک د پوهنتونونو د علومو د اکاډمۍ غړی هم وو، ده ډېر کارونه د مختلط اناليز په تيورۍ، وکتوري اناليز او نظري ميخانيک کې کړي.

لاندې فورمول د هميلتون د اپراتور په نامه ياديږي.

$$\vec{\nabla} := \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

سرچينې

1. آرفکن، جورج، ترجمه محي الدين شيخ الاسلامي، روشهاي رياضي درفزيک، چاپ وصحافي ديبا، ايران، سال 1377.
2. ا. حسام الديني، معادلات ديفرانسيل مقدماتي، دانشگاه شيراز، سال 1382.
3. اسمعيلي. دکترحميد، رياضيات مهندسي، انتشارات دانشگاه بوعلي سينا، سال 1383.
4. ايوز، هارورد، ترجمه محمد قاسم وحيدي اصل، آشنايي باتاريخ رياضيات، جلددوم، مرکز نشردانشگاهي تهران، سال 1370.
5. بُوس، مري ال، ترجمه جمشيد قنبري، روشهاي رياضي درعلوم فزيک، جلددوم،انتشارات دانشگاه فردوسي مشهد، سال 1376.
6. پارياب. خليل، حساب تفاضلي وانتګرال پيشرفته، جلددوم، سال 1381.
7. پاکزاد، حميدرضا، رياضي مهندسي رشتۀ برق، انتشارات جنګل، سال 1384.
8. جمشيدي، فرزين حاجي، رياضي مهندسي، انتشارات صفار-اشراقي، سال 1384.
9. درويزه، دکترمنصور، رياضيات عالي مهندسي، انتشارات دانشگاه ګيلان، سال1377.
10. 10. سيګ. اروين کرويت، تشريح کامل مسايل رياضيات مهندسي پيشرفته، جلددوم سال1384.

11. شیدفر. عبدالله، ریاضیات مهندسي، سال 1382.

12. عـالم زاده. علـي اکبـر، معـادلات تـــــــفاضلي قـسمي بـرای علـوم مهندسي، سال 1376.

13. ماتیوز، یون، ترجمه علي اکبرعـالم زاده، روشـهاي ریاضـي درفزیـک، جلددوم، مؤســسه علوم مهندسي، سال 1370.

14. کرایه چـــــیان، دکتراصغر، معـادلات تـــــــفاضلي وکاربُردآنهـا، سال 1382.

15. کـاکر، پوهاند دوکتورعبـدالغفار، معـادلات تفاضـلي خطـي باضـریب هاي ثابت، نشر پوهنتون کابل، سال 1355.

16. Georgeyankovsky, Integral and Differential Calculus, vole(II), 1974.

17. Mary L. Boas, Mathematical Methods in the Physical S sciences 1966.

18. Morse. Philip M. Methods of Theoretical Physics. Part (II), Newyork, 1953.

19. Mc graw- Hill , Advanced Calculus , 1963.

20. Piskunov . N, Differential and Integral. Calculus (II), English Translation , 1974.