بسم الله الرحمن الرحيم

ډالۍ

ګران زوی احمد مسیح خیبر ته چې زیرک او اجتماعي انسان دی!

نوي رياضيات

12

مثلثات

(لومړی ټوک)

ليکوال: پيمان گردلو
ژباړنه: استاد پشتون گل رسولي

پته: آسمايي واټ، سعيد خپرنځی، کابل - افغانستان

اړيکه: 0707575935 او 0788100157

Email: Shirahmad_saedy@yahoo.com

کتاب پيژندنه

• **کتاب**: مثلثات (لومړی ټوک)

• **ليکوال**: پيمان گُردلو

• **ژباړنه**: استاد پشتون گل رسولي

• **کمپوز او ډيزاين**: انجنيرمحمدافضل ذاکر او انجنير عبدالوهاب همت

• **علمي ایډیټ**: پوهاند ډاکټر محمد انور غوري

• **ژبنی ایډیټ**: انجنير عبدالباقي سلطاني

• **له اصل سره د فورمولونو پروف کتنه**: انجنيرعبدالوهاب همت، انجنير محمدافضل ذاکر، انجنير عبدالباقي سلطاني، انجنير تاج محمد جاهد، کاشف وردگ، وارث سمسور، اميد زرغون، عصمت وردگ، جاويد نعمتي

• **خپرندوی**: سعيد خپرنځی، • **چاپځای**: سعيد

• **شمېر**: 1000 ټوکه، • **چاپ وار**: لومړی، • **چاپ کال**: 1397 لمريز

• **کچه**: وزيري، • **صفحې**: 332 صفحې

بيه: **320** افغانی

یادښت

غرب یو مهال د طبیعي علومو ترجمه کوله او په دغه علمي حوزه کې یې ځکه پیداوار نه درلود، چې کلیسا د غربي فکر واگی په لاس درلـود، خلک یې له طبیعي څېړنو، معنوي افراطیت تـه قیـزه کـړي وو، حتـی د تجربي علومو له لورې نـوي عرضـه شـوي مفـاهیم بـه چـې د کلیسـا لـه موخو سره په ټکر کې وو، کتمان کېدل او څرگنـدونکي بـه یـې پـه عـام محضر کې وژل کیدل؛ یعنې د بکر فکر جرأت او په طبیعي علومـو کـې تصرف په مرگ منتهي کیده. د کلیسا مسـتبد فشـارونو خلـک پـه تنـگ کړل، چون فشار فاصلې له منځه وړي، نو د کلیسـا پـر وړانـدې مردمـي یووالی(انقلاب) رامنځته شو؛ د انسـاني علومـو یـو اصـل دی وایـي «هـر افراط تفریط او هر تفریط افراط زیږوي»، نو د کلیسا افراطي چلن باعث شـو چـې غـربي انسـان لـه دغـه علمـي انقـلاب (رنسـانس) وروسـته پـه معنویاتو کې له تفریطه کار واخلي او مادي برخه کې افراط وکړي.

افغانستان هم په طبیعي علومو کې چندان سابقه نلري، حتی په دغـه شق کې د سل‌کلن تاریخ مدعي نه گڼـل کیـږي، ددې لپـاره چـې افغـان انسان په دغه علمي برخه کې موزون او غیرافراطـي گامونـه واخـلي، نـو د ښاغلي احمدفهیم‌سپین‌غر په مشرۍ مـو پـه ۱۳۸۸ کـال کـې زرغـون د څېړنې او ژباړې مرکز ایجاد کـړ، د زرغـون لیـدلوری پـه افغانسـتان کـې د ساینس فرهنگ او زرغونې انرژۍ وده ده، چې د ساینسي کتـابونو، رسـالو او مقـالو ژبـاړل، پـه ساینسيـ موضـوعات څېړنـې کـول، د سـیمینارونو او کنفراسـونو تـدویرل مـو کـاري لومړیتوبونـه وو، مـوږ لـس گونـه ساینسيـ کتابونـه وژبـاړل او لـه دې سره جوخـت مـو د افغانسـتان پـه تـاریخ کـې د لومړي ځل لپاره «افغان طبیعي علومو ټولنه» چې د افغـان سـاینس‌پوهانو لپاره د راټولیدلو ځای دی ایجاد کړه، هوډ لرو چې ددغه هلوځلو په پایلـه کې افغانستان د طبیعي علومو او تکنالوژۍ په تولید کې برخـه واخـلي او له مصرفـي حالتـه راووزي. لـه ټولـو هغـو فرهنگپـالو پـه ځـانگړي ډول لـه شیراحمد سعیدي، حـاجي نـذیر خروټـي او انجنیـر عبـدالباقي سـلطاني څخه مننه کوم چې فرهنگي چارو ته ځانگړې پاملرنه کوي.

انجنیرمحمدافضل‌ذاکر

د زرغون څېړنې او ژباړې مرکز مشر

د ژباړنې خبرې

ستاسې مخې ته پروت کتاب د رياضي د لړۍ يوه کړۍ ده، د دغه يوويشت ټوکو لړۍ کتابونه په ترتيب عبارت دي له: سيټ، توان، الجبري افادې، الجبري مطابقتونه، د الجبري افادو تجزيه، جذر، لومړۍ درجه افادې، دويمه درجه افادې، نامساوات، د پولينومونو تقسيم، دکارتي هندسه، مثلثات۱، مثلثات۲، مطلقه قيمت، زينه‌يي تابع(صحيح جز)، لوګارتم، تابع، ليمټ، متماديت، مشتق او د مشتق کارونې څخه. دغه لړۍ د رياضي ټولو شايقينو ته ده چې په لوست سره يې په رياضي برخه کې هر ډول ستونزه حل کېدلی شي.

کابو ديرش کاله مې د رياضي او فزيک تدريس کړی، ډېری وخت به د ديپارټمنټ همکارانو راته کړل: «شاګردان په رياضي کې غبي دي، نه پوهيږو څه ورسره وکړو». په دې هکله له فکر وروسته مو درک کړه چې ستونزه په شاګردانو کې نه ده بلکې د دغه ستونزې لمن پراخه ده او نور ډېر فکټورونه په ځان کې لري. موږ شايد کله هم فکر نه وي کړی چې درسي نصاب څومره د زده کوونکو له اړتياوو سره سم جوړ دی؟ شايد پام مو نه وي شوی چې څرنګه درسي پلان جوړ کړو ترڅو له رياضي سره د زده کوونکو مينه زياته شي؟ شايد موږ معلمينو کله هم خپل سر ګريوان ته نه وي کړی او له ځانه مو نه وي پوښتلي چې ايا زما د تدريس طريقه سمه ده، که نه؟ نو بناً ويلی شو چې که شاګرد رياضي نشي- زده کولی بايد له شاګرد سره جوخت، درسي نصاب، درسي پلان او د خپل تدريس طريقه هم وارزوو.

رياضي هغه وخت ښه تدريس کېدلی شي چې د نصاب کارپوهان درسي نصاب د ښوونکو سره په مشوره او د شاګردانو له ورځنيو اړتياوو سره سم جوړ کړي. ښوونکي بايد درسي پلان او د تدريس طريقه د شاګردانو په خوښه وټاکي داسې نه خدای مه کړه له يوې خوا د رياضي محتوايي وچوالی او له بل لوري د ښوونکي نامناسبه درسي طريقه باعث شي ترڅو ابداً له رياضي څخه د شاګرد زړه تور شي. اصولاً په ټوله نړۍ کې دا باب دی چې د يوې برخې کارپوه په خپله کاري حوزه کې له کلونو کار وروسته په ليکلو يا ژباړلو پيل کوي. زه هم د رياضي او فزيک برخې د متقاعدې استادې په توګه هڅه کوم چې مناسب متنونه په رياضي او فزيک برخه کې را وژباړم ترڅو د درسي موادو له درکه د شاګردانو او ښوونکو ستونزه تر يوه بريده حل شي. د اوس لپاره خو د رياضي دغه لړۍ وګورئ، که عمر باقي و، نورې هڅې به هم کوو.

کاميابي مو غواړم

پشتون ګل رسولي

سریزه

درنو ښوونکو ته!

ولې ځینې یا حتی ټول زده کوونکي له ریاضي سره ستونزه لري او درک کولی یې نشي؟

په ریاضي کې د کار کولو سره درې پوښتنې را ولاړېږي:

- زده کوونکي، څرنګه ریاضي زده کوي؟
- څرنګه د ریاضي مسائل حل کوي؟
- ښوونکي باید څرنګه ریاضي تدریس کړي؟

پاسنیو پوښتنو ته د ځواب په موخه اړینه ده څو (د ریاضي چلن) او (د ریاضي پرمختګ) مفاهیم تعریف کړو. د لاندې ګراف په اساس او دننې او بهرنې عواملو له اثره د ریاضي پوهې ته د ریاضي چلن وایي (د زده کوونکو په تړاو).

د تدریس طریقه ← زده کول ← د مسائلو حل ← سنجش او ارزونه

(د ریاضي چلن) کې، کمي او کیفي پرمختګ راتللو ته (د ریاضي پرمختګ) وایي. د ریاضي په تدریس او زده کړه کې ډېرې ستونزې موجودې دي چې ځینو ته یې لاندې اشاره کوو:

- په انسان کې د تفکر او د زده‌کړې عملیې پېچلتیا،
- د ریاضیکي استدلال او مفاهیمو طبیعي پېچلتیا،
- غیرمتخصص او بې تجربې ښوونکي،
- او د برنامه‌یي موخو ګونګ والی.

پاسني ټول موارد د ریاضي درسونو د زده‌کړې په تړاو، د ډېرو زده‌کوونکو په ناکامی او په پایله کې په زړه توریدو منتهي کېږي.

هر زده کوونکی بېل او منحصر شخصیت لري چې له مفاهیمو څخه اخیستنې، پوهه او مهارتونه په بېلابېل ډول ترلاسه کوي، نو که د ریاضي په تدریس کې د سمو علمي او ښوونیزو طریقو څخه کار وانخیستل شي، زده کوونکي به د ریاضي مفاهیم یا زده نه کړي یا به یې غلط زده کړي.

پیمان ګردلو

ژمی ۱۳۸۵

د دغه لړۍ په هکله څو خبرې

د پيمان گردلو، د رياضي مسلسل او مهم يوويشت ټوکه کتابونه په لاندې ډول دي:

1. سيټونه
2. توان
3. الجبري افادې
4. الجبري مطابقتونه
5. د الجبري افادو تجزيه
6. جذر
7. لومړۍ درجه افادې
8. دويمه درجه افادې
9. نامساوات
10. د پولينومونو تقسيم
11. دکارتي هندسه
12. مثلثات (لومړی ټوک)
13. مثلثات (دويم ټوک)
14. مطلقه قيمت
15. زينه‌يي تابع
16. لوگارتم
17. تابع
18. ليمټ
19. متماديت
20. مشتق
21. د مشتق کارونې

د رياضي دغه لړۍ د ښوونځيو لپاره د مرجع حيثيت لري او په رياضي برخه کې د لوړو زده کړو لپاره بنسټ جوړوي. په دې کتابونو کې ټول مباحث په خورا دقت او د جزئياتو په پام کې نيولو سره تر بحث لاندې نيول شوي او ټول موضوعات د بې ساري او بېلابېلو مثالونو په بيان سره بدرگه کېږي.

ددغه لړۍ ټول کتابونه گرانې خور استاد پشتون‌گل رسولي له فارسي څخه پښتو ته په پخو ادبياتو او خوږو عباراتو په برياليتوب سره ترجمه کړي. بې له شکه دا لوی کار د گران هېواد د ځوان نسل لپاره ستر خدمت او د وطن دوستۍ صريح نښه بلل کېږي.

د الله پاک څخه د استاد لپاره د نورو برياليتوبونو هيله من يم.

پوهاند ډاکټر محمدانور غوري

د کابل پوهنتون د رياضي پوهنځي رئيس

یادښت

تاریخ راته وایي چې هر ډول ټولنیز-اقتصادي تحول د مادي وسایلو له تحول سره کلک تړلی دی. بلخوا، غوڅ اکثریت مادي تحولاتو کې فزیک فعاله ونډه لرلې ده، یعنې فزیک د معاصر انسان په نړۍلید کې اساسي نقش لوبولی.

هېڅ علم له فلسفې سره دومره اُرګانیکه اړیکه نلري لکه فزیک یې چې لري. پخوا زمانو کې به دیني حلقاتو ته منسوب بنيادمان د فزیک له ودې بېریدل، ځکه فزیک نړۍ هغسې معرفي کوي څرنګه چې ده. د هغه وخت دخلکو دغه بېره د فزیک په فلسفي بُعد دلالت کوي، اما په فزیک کې د نسبیت، کوانتم او سترینګ تیوري منځته راتلل په مطلق ډول فزیک د فلسفې د جز په توګه تائید کړ.

بالمقابل د فزیک د محصل په توګه په دې باوري یم چې په قاطع توګه د فزیک په وده کې ریاضي اساسي نقش درلودلی او لري يې. که موږ د فزیک هرې برخې ته ځېر شو نو ریاضي به پکې ووینو. ځکه د طبیعت ټول اجزاء یوه بل پورې اړوند دي او د اجزاوو دغه اړیکه د تابع په مرسته ښودل کېږي تابع او د تابع اجزاء(لیمت، مشتق او انتیګرال) د فزیک کُلیات جوړوي.

اوس که څوک د بشري تحول په هکله ګړابي نو باید د ریاضي-فزیک په نقش او کارکړو بلد وي، تر څو په سمه توګه د بشري ارتقا او اقتصادي-ټولنیزو مناسباتو وړاندوینې وکړلی شي. یا که څوک له فلسفي مباحثو سره مینه لري او فلسفه کې دننه تلل غواړي نو باید د ریاضي-فزیک په اساساتو پوه وي، کنه نو سفسطې به غړوي. یا که څوک د تکنالوژۍ ماهر کېدل غواړي نو باید چې ریاضي-فزیک ته په کمه سترګه ونه ګوري.

کله چې محصل وم په ساینس برخه کې د درسي وثایقو پسې به لالهانده وم. معتبرې علمي منابع به کمې یا اصلا نه وې ځکه خو مو د احمدفهیم سپین‌غر په مشرۍ په دغه علمي حوزه کې د یو لړ علمي کارونو د ترسره کولو هوډ وکړ. د دغو هڅو لړۍ دا ده نن د ریاضي برخې د دایره‌المعارف چاپېدو ته را ورسېدله. د ریاضي دغه جامع لړۍ چې ستاسې په لاس کې ده، آغلې استاد پشتون‌ګل رسولي ژباړلې، تر کومه ځایه چې مې ژباړه لوستې موزونه او متوازنه ده. اصل کتاب کې هم د موضوعاتو تسلسل تر ډېره رعایت شوی، خو له دې چې د دایره‌المعارف یا مرجع حیثیت لري، نو ځینې ځایونو کې ځینې موضوعات تر وخت د مخه هم راغلي. خو په ټوله کې دغه لړۍ ټولو زده کوونکو، محصلینو او د ریاضي مینه والو ته ګټوره تمامېدلی شي، ویې پېرئ، زده یې کړئ او ورزده یې کړئ.

تاسې جار شم

انجنیر مطیع الله هوتک

د افغان طبیعي علومو ټولنې مؤسس

۱۳۹۶-۱۲-۱۵ سه شنبه د شپې یوولس نیمې بجې

رياضي د علومو مبادي ده

هنر له کيفيت سره او علوم له کميت سره کار لري، يعنې کله کله يو فرد شعر نسبت يوه اوږد شعر ته ډېر تاثير لري، ځکه شعر هنر دی او په هنر کې اصل، کيفيت دی نه کميت. بالمقابل دوه ماليکوله هايدروجن له يوه ماليکول اوکسيجن سره يو ځای کېږي اوبه جوړوي، دلته بحث د اوکسيجن او هايدروجن د ماليکولونو پر کيفيت نه، بلکې پر کميت يې دی. يعنې له دريو ماليکولونو هايدروجن او څلور ماليکولونو اوکسيجن څخه هېڅکله اوبه نشو ترلاسه کولی. ځکه خو وايو هنريت له کيفيت او علميت له کميت سره تړاو لري او د کميت بيان يوازې د رياضي په مرسته شونی دی.

بناً کله چې د علومو اساس کميت وي او د کميت بيان د رياضي په مرسته ممکن وي، خود به رياضي د ټولو علومو مبادي ګڼل کېږي. رياضي ته ځکه د علومو مبادي وايي، چې پرته له هغې د نورو علومو حصول ناممکن دی. په انجنيرۍ کې د کانال ميل يا د سړک ميل د تانجانت په مرسته معلوموي او تانجانت د رياضي موضوع ده. په برق-فزيک کې وايي کله چې مقاومت زياتيږي، امپير کمېږي د امپير او مقامت دغه رابطه د معکوس تناسب په ذريعه ښودل کېږي او معکوس تناسب د رياضي مبحث دی. په کيميا کې غلظت مساوي کېږي په (د هايدروجن د شمېر-منفي لوګارتم)، لوګارتم هم د رياضی بحث دی. ان سوداګري هم د رياضي په مرسته کېږي، تخفيف، د ګټې فيصدي او کميشن د رياضي په مرسته معلوميږي. يعنې که يو انجنير په تانجانت نه وي پوه، ميل نشي معلومولی. همدارنګه که د فزيکپوه تناسب نه وي زده، د امپير او مقاومت اړيکه نشي ښودلی او که د کيمياپوه لوګارتم نه وي زده، غلظت نشي معلومولی. او يو سوداګر په حساب د نه پوهېدو له وجهې ممکن موفق سوداګر ونه اوسي.

اوس نو که څوک علومو ته لاسرسی غواړي، نو لومړی دی رياضي په اساسي توګه زده کړي. د رياضي د زده کړې لومړی شرط معتبرو منابعو ته لاسرسی دی، له نيکه بختـه ستاسې په لاس کې د رياضي دغه يوويشت ټوکه لړۍ چې آغلې استاد پشتون‌ګل رسولي، پښتو ژبې ته ترجمه کړې، متعلمينو او محصلينو ته د يوې مؤثرې او معتبرې مرجع په توګه واقع کېدلی شي. ارزو لرم، دغه لړۍ بار بار ولولی او مثالونه يې له ځانه سره تکراراً کار کړئ په دې توګه به مو د ټولو علومو الفبا زده کړې وي.

انجنيرغلام‌نقيب‌رسولي

د اوبو او برېښنا وزارت متقاعد انجنير

رياضي (د کائناتو ژبه)

څلور پېړۍ مخکې (1610 کال کې)، کله چې ګالیله څرګنده کړه چې څمګه د لمر په چاپېر چورلي، نو د کايناتو ژبه يې رياضيکي ژبه وبلله او مثلثونه، دايرې او نور هندسي شکلونه يې د دې ژبې توري وبلل. ګاووس رياضيات "د علومو ملکه" بللې. په 2010 کې معاصر رياضي‌پوه، "پروفيسور ډيو سوټ وې" وويل: "يقيناً تلسکوپونه او مايکروسکوپونه، کتنې او تجربې يو نقش لري چې بايد و يې لوبوي، خو زه باور لرم چې د معاصر ساينس تر شا اصلي چلوونکې قوه رياضيات دي." د دې خبرو او د ورځني پديدو پر بنسټ ټول د رياضياتو پر اهميت پوهېږي او انکار ترې نشي کېدلی. خو پر دومره ستر اهميت سربېره موږ په دې برخه کې د نورو برخو په څېر تر هر چا خوار يو. ځکه نه په نورو ژبو پوهېږو او نه په خپلو ژبو کافي مواد لرو.

د پوهنتونونو د محصلينو تر ټولو ستره ستونزه له درسي موادو سره ده. کله چې محصل وم، تقريباً ټول کتابونه مو په انګلسي وو، خو زياتره محصلين يا خو په انګليسي نه پوهېدل يا خو ډېر کم پرې پوهېدل. دوی ته به تر ټولو ښه خبر دا و چې کوم چا به کوم درس وژباړه. له بلې خوا په نورو پوهنځيو کې ستونزه دا وه چې درسي مواد يې اصلاً د پوهېدلو وړ نه وو. درسي چپټرونه خو يا پخواني دي او يا هم په ډېر بې کيفيته ډول ليکل شوي يا ژباړل شوي دي. باور لرم که مو په خپلو ژبو کې با کيفيته درسي مواد لرلی، د لوړو زده کړو حالت به له اوسني هغه څخه په ځلونو غوره و.

لومړی ځل دی چې په رياضياتو او په ټوله کې د ساينس په برخه کې په دومره شمېر کتابونه ژباړل کېږي او خپرېږي، يو کال مخکې په ټول هېواد کې څه باندې سل کتابونه چاپ شوي وو چې زياتره يې د سياسي او ټولنيزو کتابونو ژباړې وې. دغه کتاب د رياضي د يووشتو کتابونو له سلسلې څخه يو کتاب دی، له دې ور هاخوا د دې کتابونو او د ژباړې په اړه يې ځينې ټکي شته دي، چې دا کتابونه له نورو څخه بېلوي. ټول کتابونه يوه لړۍ ده او يوه ليکوال ليکلې. ټول کتابونه ، يوې ژباړنې ژباړلي، چې پر رياضياتو او نورو ساينسي-مضمونو هم ښه برلاسی لري، کلونه کلونه يې تدريس کړي، او هم د ژباړې او ليکنې تجربه لري. د دې کتابونو د ژباړې په اړه مهمه خبره دا ده چې له دقيق ايډېټ او بيا کتنې وروسته يو ځای خپرېږي.

باور لرم چې دا کتابونه د ښوونځيو او کورسونو د زده کوونکو او د انستېټونو او پوهنتونونو د محصلينو لپاره، په افغانستان کې غوره درسي مواد او د مطالعې لپاره د رياضياتو تر ټولو غوره کتابونه دي، او د رياضياتو په برخه کې د زده کوونکو ستونزې تر ډېره حلولی شي. دا کتابونه بايد هر افغان زده کوونکي او محصل ته ورسول شي. راځئ چې دا کتابونه تر هره کوره او تر هر ټولګي پورې ورسوو.

استاد پشتون ګل رسولي ته د دې ستر کار مبارکي وايم، الله د پوره صحت، اوږد عمر او د ساينس او ژباړې په برخه کې لا حوصله او توفيق ورکړي.

انجنير عبدالباقي سلطاني

لړلیک

سرلیک	مخګڼه

1) زوایه..1
$1-1$) د زوایه تعریف..............................1
$1-2$) د زوایه د اندازه نیونې واحدونه...........................2
$1-3$) د ساعت دوو عقربو ترمنځ زاویه............................5
2) په مختصاتي محورونو سیستم کې مثلثاتي نسبتونه.......................6
$2-1$) تعریف..............................6
$2-2$) په څلور ګونو ناحیو کې د مثلثاتي نسبتونو علامې...........................7
$2-3$) په مثلثاتو کې د تشابه کارونه.............................7
3) قایم الزاویه مثلث..............................8
$3-1$) په هغه قایم الزاویه مثلث کې چې یوه زاویه حاده وي، د مثلثاتي نسبتونو محاسبه...8
$3-2$) د قایم الزاویه مثلث د حل کلاسیک حالاتونه...........................10
4) مثلثاتي دایره.....................................11
$4-1$) د مثلثاتي دایرې تعریف..............................11
$4-2$) په مثلثاتي دایره کې د یوې زاویې د مثلثاتي نسبتونو محاسبه..........14
$4-3$) یادونې...............................16
5) مثلثاتي مطابقت.................................18
6) په بېلابېل حالتونو کې د دوو کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ رابطه.................28
$6-1$) د دوو معکوسو کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه $(-\alpha,\alpha)$..............28
$6-2$) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونوترمنځ اړیکه چې مجموع یې π یږي $(\pi-\alpha,\alpha)$.29
$6-3$) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې تفاضل یې π کیږي $(\pi+\alpha,\alpha)$ 30
$6-4$) د هغه کمانونو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې مجموع یې 2π کیږي $(2\pi-\alpha,\alpha)$ 31
$6-5$) د هغه کمانونود مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې تفاضل یې 2π کیږي $(2\pi+\alpha,\alpha)$ 31
$6-6$) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې تفاضل یې $\frac{\pi}{2}$ کیږي $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha,\alpha\right)$ 33
$6-7$) دهغه‌کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې مجموع یې $\frac{\pi}{2}$ کیږي $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\alpha\right)$ 34
$6-8$) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې تفاضل یې $\frac{\pi}{2}$ کیږي $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha,\alpha\right)$ 35
$6-9$) دهغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه‌چې‌مجموع‌یې $\frac{3\pi}{2}$ کیږي $\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha,\alpha\right)$ 36
$6-10$) د فورمولونو لنډیز..37

7) $a \pm b$ مثلثاتي نسبتونه..41
$7-1$) اصلي فورمولونه..41
$7-2$) فرعي فورمولونه..45
8) $2a$ او $3a$ مثلثاتي نسبتونه..48
$8-1$) اصلي فورمولونه 48
$8-2$) فرعي فورمولونه..51
9) د لوګارتم په مرسته افادې د محاسبې وړګرځول..59
$9-1$) په ضرب د مجموع او تفاضل اوړل 59
$9-2$) د لوګارتم په مرسته د ټاکلی زاویې په کارولو سره، د افادې د محاسبې وړ ګرځول..63
10) په مجموع تفاضل د دوو مثلثاتي نسبتونو د حاصلضرب اړول..65
11) د Arc مفهوم..68
$11-1$) تعریف..68
$11-2$) د Arc اړوند مطابقتونه..68
12) د مثلثاتي نسبتونو او مثلثاتي نامساواتو د بدلون حدود..75
13) د مثلثاتي افادو mix او $\min$ 79
14) شرطي مطابقتونه..80
15) په مثلثاتو کې سلسلې..81
16) مثلثاتي معادلې..83
$16-1$) سریزه..83
$16-2$) تعریف..84
$16-3$) ځانګړې مثلثاتي معادلې..86
$16-4$) $Bioche$ بیوش قاعده..92
$16-5$) کلاسیک معادلې..93
$16-5-1$) لومړی ډول کلاسیک..93
$16-5-2$) دویم ډول کلاسیک معادله..101
$16-5-3$) درېیم ډوله کلاسیک معادلې..104
$16-5-4$) څلورم ډوله کلاسیک معادلې..105
$16-6$) د مثلثاتي معادلو حل او سپړنه..107
$16-7$) د الجبری معادلو په حل کې د مثلثاتو کارونه..109
17) مثلثاتي سیستونه..109
$17-1$) کلاسیک سیستم..109
$17-1-1$) لومړی ډوله کلاسیک سیستم..109

2 – 1 – 17) دویم ډوله کلاسیک سیستم........................... 110
3 – 1 – 17) دریم ډوله کلاسیک سیستم 111
2 – 17) غیر کلاسیک سیستمونه....................................... 111
18) د مثلث د اجزاوو ترمنځ اړیکې....................................... 114
1 – 18) په مثلث کې د زایو ترمنځ اړیکې.............................. 114
2 – 18) د مثلث د اضلاع او ساین ترمنځ رابطه........................ 118
3 – 18) د مثلث د کوساین او اضلاعو ترمنځ رابطه....................... 122
4 – 18) د مثلث د زاویې او محیط ترمنځ رابطه........................ 123
5 – 18) د مثلث د دریو اضلاعو او دوو زاویو ترمنځ رابطه.................. 126
6 – 18) د مثلث د ارتفاع ګانو محاسبه.................................. 127
7 – 18) د هغه دوو نقطو ترمنځ و واټن چې اندازه یې خنډ پروت وي............ 129
8 – 18) د هغه دوو نقطو د واټن محاسبه چې زموږ څخه لرې دي................. 129
9 – 18) له اړونده ضلعو او راسونو څخه د مثلث د دریو ارتفاع ګاڼو د تقاطع نقطې واټن.130
10 – 18) د مثلث د مساحت محاسبه....................................... 131
11 – 18) د داخلي ناصفونو د طول محاسبه................................ 132
12 – 18) د بهرنیو ناصفونو د طول محاسبه................................ 133
13 – 18) د محیطي دایرې د شعاع او مثلثاتي نسبتونو له جنسه د مثلث د محیط محاسبه.134
14 – 18) د داخلي او بهرني محاطي دایرې د شعاع محاسبه..................... 134
15 – 18) ارتفاعیه مثلث.. 135
16 – 18) بهر مرکزي مثلث.. 136
17 – 18) د محیطي دایرې او محاطي دایرې د مراکزو ترمنځ واټن................ 137

1. زاویه

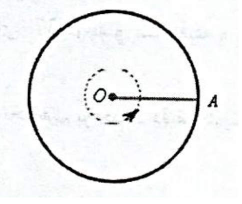
1-1) د زاويې تعریف

کله چې یو قطعه خط د خپل راس شاوخوا دوران وکړي نو منځته راغلې ناحیې ته زاویه وایي. دغه دوران ممکن د ساعت د عقربې مطابق یا خلاف وي. په مثلثاتو کې جهت، د ساعت د عقربې خلاف جهت دی او داسې ګڼل شوې هغه زاويې چې د عقربې خلاف حرکت کوي مثبتې زاويې دي او د عقربې مطابق حرکت کوونکو زاویو ته منفي زاويې وايي.

لاندې $A\hat{O}B$ (د ساعت د عقربې خلاف) او $M\hat{O'}N$ (د ساعت د عقربې مطابق) زاويې دي.

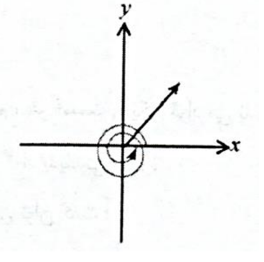
که چېرې OA خط د خپل راس (یعنې O) شاوخوا داسې دوران وکړي چې بېرته د پیل نقطې ته ورسیږي، نو ویل کیږي چې یو مکمل دور وهل شوی.

د O نقطې شاوخوا د OA له دوران څخه یوه دایره منځته راځي.



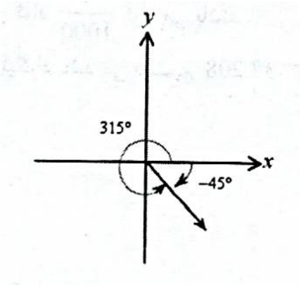
باید وویل شي چې په مثلثاتو کې یوه زاویه کېدای شي د یوې دایرې څخه زیات دوراني حرکت څخه منځته راشي.

په لاندې شکل کې، هغه زاویه وینو چې د یوه مکمل دوران له څرخېدو څخه منځته راغلې.



په دې اساس په مثلثاتو کې که چېرې د یوې زاويې د پیل او پای اضلاعوې معلومې وي نشو کولای اندازه او حتی علامه یې وټاکو.

مثلاً په لاندې شکل کې، راکړل شوې زاویه سربېره پر دې چې -45° ده، کېدای شي 315° هم وي.



2−1) د زاويې د اندازه نيونې واحدونه

په مثلثاتو کې درې اصلي واحدونه د زاويې د اندازه نيونې لپاره کارول کيږي چې عبارت دي له درجې، ګراد او راديان څخه، لاندې هر يوه ته اشاره شوې.

درجه

که د يوې دايرې محيط په 360 مساوي برخو وويشو هرې برخې ته يوه درجه وايي.

په بل عبارت د يوه کامل دوران $\frac{1}{360}$ برخه يوه درجه زاويه راکوي.

د درجې د ښودلو لپاره له $(^\circ)$ علامې استفاده کوو، نو ځکه:

$$1^\circ = \frac{1}{360} \times \text{د دايرې محيط} = \frac{2\pi}{360} rad \Rightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180} rad$$

د درجې اجزاء عبارت دي له دقيقې او ثانيې څخه.

هره دقيقه $\frac{1}{60}$ درجه اوهره ثانيه $\frac{1}{60}$ دقيقه ده.

مثلاً که د يوې زاويې اندازه 37 درجې او 25 دقيقې او 15 ثانيې وي، ليکو چې:

$$37^\circ,25',15''$$

که وغواړو چې $(37^\circ,25',15'')$ افاده د دقيقې له جنسه وليکو نو لرو چې:

$$(37^\circ,25',15'') = (37 \times 60) + 25 + \frac{15}{60}$$

ګراد

که د يوې دايرې محيط په 400 مساوي برخو وويشو، هرې برخې ته يو ګراد وايي.

په بل عبارت د يوه کامل دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته، يو ګراد زاويه وايي.

د ګراد د ښودلو لپاره له (gr) علامې څخه استفاده کوو، نو ځکه کولی شو ووايو:

$$1gr \frac{1}{400} \times \text{د دايرې محيط}$$

د ګراد اجزا ديسي ګراد، سانتي ګراد او ميلي ګراد دي.

دیسي ګراد د ګراد $\frac{1}{10}$ برخه ده، سانتي ګراد د ګراد $\frac{1}{100}$ برخه ده او ملي ګراد د ګراد $\frac{1}{1000}$ برخه ده.

مثلاً که د یوې زاویې اندازه 37 ګراد او 2 دیسي ګراد او 8 میلي ګراد وي لیکو چې 37.208 ګراد.

رادیان

L شعاع لرونکې زاویه په پام کې ونیسئ، پوهیږو چې ددغه دایرې محیط $2\pi L$ دی.

د تعریف له مخې یو رادیان، د دایرې د هغه مرکزي زاویې اندازه ده چې د مخامخ کمان طول یې د یادې دایرې له شعاع سره مساوي وي.

د رادیان د ښودلو لپاره له (rad) کلیمې کار اخلو، په دې اساس د هرې دایرې محیط د رادیان له جنسه دی، څکه چې

$$1rad=\frac{1}{2\pi}\times \text{د دایرې محیط}\Rightarrow 1rad=\frac{360^\circ}{2\pi}\Rightarrow 1rad=\frac{180^\circ}{\pi}$$

مثلاً:

$$40^\circ=(40)1^\circ=40\left(\frac{\pi}{180}\right)rad=\frac{2\pi}{9}rad$$

$$-270^\circ=(-270)1^\circ=-270\left(\frac{\pi}{180}\right)rad=-\frac{3\pi}{2}rad$$

$$135^\circ=(135)1^\circ=135\left(\frac{\pi}{180}\right)rad=\frac{3\pi}{4}rad$$

$$3rad=3(1rad)=3\times\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)=\frac{540^\circ}{\pi}$$

$$\frac{9\pi}{2}rad=\frac{9\pi}{2}(1rad)=\frac{9\pi}{2}\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)=810^\circ$$

قضیه

له $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$ رابطې څخه، د زاویې د اندازه نیونې واحدونو د اړولو لپاره کار اخلي.

ثبوت

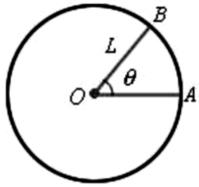
L شعاع لرونکې دایره او $AOB=\theta$ زاویه په دغه دایره کې په پام کې نیسو، فرضوو چې د θ زاویې اندازه د درجې له جنسه (D)، د ګراد له جنسه (G) او د رادیان له جنسه (R) وي، نو وبه لرو چې:

د درجې له جنسه د زاویې اندازه   د کمان طول

$\downarrow$ $\downarrow$

360° $2\pi L$

$\widehat{AB}$ $$D \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi LD}{360} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi LD}{180}$$



د کمان طول   د گراد له جنسه د زاويې اندازه

$\downarrow$ $\downarrow$

$2\pi L$ 400

$\widehat{AB}$ $$G \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi LG}{400} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi LG}{200}$$

د کمان طول   د راديان له جنسه د زاويې اندازه

$\downarrow$ $\downarrow$

$2\pi L$ 2π

$\widehat{AB}$ $$R \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi LR}{2\pi} \Rightarrow \widehat{AB} = LR$$

له دې چې د کمان طول يعنې AB ثابت قيمت لري، نو لرو چې:

$$\widehat{AB} = \frac{\pi LD}{180} = \frac{\pi LG}{200} = LR \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

يادونه

$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$ رابطې ته په پام سره لرو چې:

$$\begin{cases} D = \frac{9}{10}G \\ G = \frac{10}{9}D \end{cases} \qquad \begin{cases} D = \frac{180}{\pi}R \\ R = \frac{\pi}{180}D \end{cases} \qquad \begin{cases} G = \frac{200}{\pi}R \\ R = \frac{\pi}{200}G \end{cases}$$

يادونه

لاندې جدول په ياد ولرئ:

درجه	0	15	30	45	60	75	90	120	135	150	180	210	225	270	330	360
راديان	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

1 **مثال)** ديوې زاويې اندازه $20gr$ ده، ددغه زاويې اندازه د درجې او راديان له جنسه مساوي په څو ده؟

2 **مثال)** هغه کومه زاويه ده که د درجې له جنسه 15 واحده ورسره زيات شي، اندازه يې د گراد له جنسه ترلاسه کيږي.

3 **مثال)** د دوو زاویو مجموع $\frac{5\pi}{12}$ او تفاضل یې $\frac{50}{3}gr$ دی، هره یوه یوه زاویه څو درجې ده؟

4 **مثال)** د یوه مثلث د زاویو نسبت $5,3,2$ دی. د رادیان له جنسه تر ټولو وړوکې زاویه کومه ده؟

5 **مثال)** د دایرې کمان ته مخامخ مرکزي زاویې انـدازه څـومره رادیـان ده کـه چېـرې د کـمان طـول د دایرې د محیط $\frac{1}{6}$ برخه وي؟

6 **مثال)** $7°,30'$ زاویه، څومره رادیان ده؟

7 **مثال)** د کمان طول د درجې له جنسه $15°$ دی. اندازه یې د ګراد او رادیان له جنسه څومره ده؟

8 **مثال)** د $80.25\,gr$ او $165°,35',15''$ اندازه لرونکو زاویو مقدار د رادیان له جنسه ترلاسه کړئ.

9 **مثال)** د دوو زاویو مجموع $80gr$ او تفاضل یې $18°$ دی، د زاویو مقدار د ګـراد او رادیـان لـه جنسـه څومره دی؟

10 **مثال)** په $ABCD$ محاطي څلورضلعي کې د هغه زاویې اندازه چې د A او B نیم خطونو له تقاطع څخه ترلاسه کیږي مساوي په $\frac{250}{3}gr$ ده او د A او B زاویو تفاضـل مسـاوي پـه $\frac{\pi}{18}$ رادیـان دی، د څلورضلعي ګانو اندازې د درجې له جنسه ترلاسه کړئ.

11 **مثال)** که د یوې زاویې اندازه د درجې له جنسه a او د ګراد له جنسه b وي، $a,b \in N$ ، د a تر ټولو وړوکی قیمت څومره دی؟

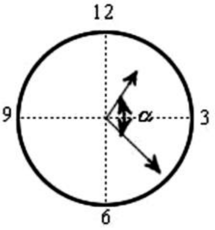
12 **مثال)** د دوو زاویو مجموع $60°$ او تفاضل یې $\frac{100}{3}gr$ دی، د دغه دوو زاویو نسبت څومره دی؟

13 **مثال)** هغه کوم کمان دی، که له اندازې سره یـې د درجـې لـه جنسـه 15 عـدد ورزیـات شي، نـو د ګراد له جنسه یې اندزاه ترلاسه کړئ؟

$3-1$) د ساعت د دوو عقربو ترمنځ زاویه

په H ساعت او M دقیقو کې، د دوو ساعت شمېر او دقیقـه شـمېر عقربـو تـرمنځ زاویـه د درجـې لـه جنسه عبارت ده له:

$$a=\frac{11M}{2}-30H$$



14 **مثال)** په 3 بجو او 22 دقیقو کې، د ساعت د دوو عقربو ترمنځ زاویه د درجې له جنسه مساوي پـه څو ده؟

يادونه

که د a په محاسبه کې $a > 180^{\circ}$ وي کولی شو $360^{\circ} - a$ د دوو عقربو ترمنځ زاويه وګڼو او په 12 بجو او M دقيقو کې کولی شو په ځای يې $H = 0$ وضع کړو.

15 **مثال)** په 1 بجه او 50 دقيقو کې د ساعت د عقربو ترمنځ څو درجه زاويه جوړيږي؟

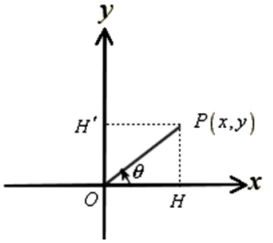
16 **مثال)** په 12 بجو او 17 دقيقو کې د ساعت د عقربو ترمنځ زاويه څو درجه ده؟

2. په مختصاتي محورونو سيستم کې مثلثاتي نسبتونه

1-2) تعريف

فرضوو $P(x, y)$ د مختصاتو له مبدا پرته د مختصاتو پرمخ يوه نقطه وي او θ هغه زاويه وي چې OP يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي.

$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$



له P څخه يو عمود په PH (د طول محور) او بل عمود په PH' (د عرض محور) رسموو.

د θ زاويې ساين، کوساين او تانژانت د $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ په فرضولو سره په لاندې توګه تعريفوو.

$x = \overline{OH}, y = \overline{OH}'$

$$\sin\theta = \frac{\text{مخامخ ضلع}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{PH}{OP} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\overline{OH'}}{OP} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ګاونډ ضلع}}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OP} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{مخامخ ضلع}}{\text{ګاوند ضلع}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{PH}{OH} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\overline{OH'}}{OH} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ګاوند ضلع}}{\text{مخامخ ضلع}} \Rightarrow \cot\theta = \frac{OH}{PH} \Rightarrow \cot\theta = \frac{OH}{\overline{\overline{OH'}}} \Rightarrow \cot\theta = \frac{x}{y}$$

پام مو وي چې په محاسبو کې له 0 نقطې څخه د P نقطې واټن اړين نه دی.

له پاسني تعريف څخه داسې ښکاري چې که $p(x,y)$ نقطه په مبدا نه وي پرته، تل د θ زاويې (هغه زاويه چې د op شعاع او ox مثبت محور ترمنځ جوړه شوې) ساين او کوساين د تعريف وړ دي.

که $x=0$ (يعنې p نقطه د y محور پرمخ پرته وي) د θ زاويې تانجانت نشي تعريف کېدلی.

که $y=0$ (يعنې p د x محور پرمخ پرته وي) د θ زاويې کوتانجانت تعريف کېدلی نشي.

که p نقطه پر هيڅ يوه محور نه وي پرته $\tan\theta$ او $\cot\theta$ د يوه بل معکوس دي.

17 **مثـــال)** $U(0,-1), T(-3,0), S(0,2), R(5,0), Q(3,-2), P(-4,-3), N(-2,3), M(3,5)$ نقطــې فــرض شوي.

لومړی: دغه نقطې د مختصاتو په سيستم کې مشخصوو.

دويم:. په ټولو مواردو کې د هغه زاويې مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړئ چې د اړونده شعاع او ox مثلثاتي جهت ترمنځ جوړه شوې وي.

2 − 2) په څلور ګونو ناحيو کې د مثلثاتي نسبتونو علامې

که $p(x,y)$ نقطه د مختصاتو سيستم په هيڅ يوه محور هم پرته نه وي او θ د شعاع او ox محور ترمنځ زاويه وي، د هر يوه مثلثاتي نسبت علامه کولی شو مشخص کړو.

ناحیه / مثلثاتي نسبت	لومړی $x>0, y>0$	دویمه $x<0, y>0$	دریمه $x<0, y<0$	څلورمه $x>0, y<0$
$\sin\theta$	+	+	-	-
$\cos\theta$	+	-	-	+
$\tan\theta$	+	-	+	-
$\cot g\theta$	+	-	+	-

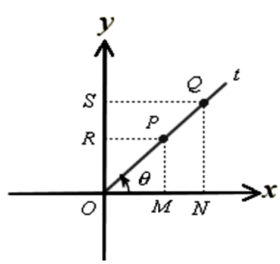
3 − 2) په مثلثاتو کې د تشابه کارونه

په لاندې شکل کې د ot محور پرمخ دوې $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ نقطې له مبداڅخه پرته په پام کې نيول شوې، که دغه خط د $x'ox$ محور له مثبت جهت سره θ زاويه جوړه کړي، وبه لرو چې:

(I) د P نقطې لپاره: $\sin\theta = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OR}}{\overline{OP}}$

(II) د Q نقطې لپاره: $\sin\theta = \dfrac{\overline{NQ}}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OQ}}$

$$\Delta OPM \sim \Delta OQN \Rightarrow \frac{OP}{OQ} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NQ}} \Rightarrow \frac{\overline{NQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}}$$



يعنې د (I) او (II) مساواتو دويم لورى له يوه بل سره مساوي دى، په بل عبارت د $\sin\theta$ د ترلاسه كولو لپاره كه د ot محور پرمخ هره نقطه وټاكو پايله يو شان راوځي او دغه مساله د $\cos\theta$ او $\tan\theta$ او $\cot\theta$ لپاره هم صدق كوي.

معمولا p نقطه د Ot قطعه خط پرمخ داسې ټاكي چې $op = r = 1$ وي.

18 **مثال)** د $x + y \geq 0\ (x \leq 0)$ قطعه خط پرمخ يوه نقطه وټاكئ او د اړونده شعاع او ox محور ترمنځ جوړې شوې زاويې مثلثاتي نسبتونه محاسبه كړئ.

19 مثال)

لومړى: $3y - 2x = 0\ (x \leq 0)$ قطعه خط رسموو.

دويم: د خوښې وړ نقطې لپاره د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه مشخصوو.

20 مثال)

$p(3, m-1)$ نقطه په څلورمه ناحيه كې پرته ده او θ د شعاع او ox محور ترمنځ زاويه ده داسې چې $\cos\theta = \frac{6}{10}$ وي:

لومړى: د m مقدار

دويم: د θ زاويې نور مثلثاتي نسبتونه محاسبه كړئ.

21 **مثال)** كه $p(x, y)$ د مختصاتو پرمخ داسې نقطه وي چې په هيڅ يوه محور هم نه وي پرته او θ هغه زاويه وي چې د اړونده شعاع او ox محور ترمنځ جوړه شوې وي، ثبوت كړئ چې:

$$1)\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 2)\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$3)\ \cot g\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad 4)\ \tan\theta . \cot g\theta = 1$$

3 قايم الزاويه مثلث

$3-1$) په هغه قايم الزاويه مثلث كې چې يوه زاويه يې حاده وي، د مثلثاتي نسبتونو محاسبه

$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويه مخامخ ضلع}}{\text{وتر}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويه مخامخ ضلع}}{\text{د } \theta \text{ زاويې ګاونډ ضلع}}$$

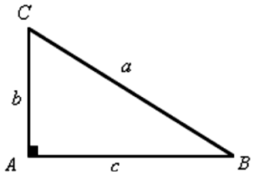
$$\cos\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويې ګاونډ ضلع}}{\text{وتر}} \qquad \cot g\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويې ګاونډ ضلع}}{\text{د } \theta \text{ زاويه مخامخ ضلع}}$$

په لاندې ABC قايم الزاويه مثلث كې لرو چې:

$$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \qquad \sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \qquad \cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\tan\widehat{B}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c} \qquad \tan\widehat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$
$$\cot g\widehat{B}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b} \qquad \cot g\widehat{C}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$$



پوهيږو چې په پاسني قايم الزاويه مثلث کې B او C زاويې د يوه بل متم $\left(\widehat{B}+\widehat{C}=90°\right)$ دي، ترلاسه شوو قيمتونو ته له دقت وروسته وينو چې:

$$if\ \widehat{B}+\widehat{C}=90°\Rightarrow \sin\widehat{C}=\cos\widehat{B}\ ,\ \cos\widehat{B}=\sin\widehat{C}\ ,\ \tan\widehat{B}=\cot g\,\widehat{C}\ ,\ \cot g\,\widehat{B}=\tan\widehat{C}$$

يادونه-

د فيثاغورث رابطه په الجبري توګه په $a^2=b^2+c^2$ شکل ده او په مثلثاتي شکل په لاندې توګه محاسبه کيږي:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$\sin A=\frac{\text{مخامخ ضلع}}{\text{وتر}}=\frac{a}{a}=1\Rightarrow \sin A=1$$
$$\sin B=\cos C\ ,\ \sin C=\cos B$$
$$\sin^2 B+\cos^2 B=1\Rightarrow \sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$$

ددغه فورمول پايلې په لاندې توګه دي:

$$\text{I)}\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$$
$$\prod)\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$$

يادونه-

د قايم الزاويه مثلث A راس ته د هرون قاعده په لاندې توګه ده:

$$s=p\left(p-a\right)=\left(p-b\right)\left(p-c\right)$$

22 مثال) په قايم الزاويه مثلث کې د $60°,45°,30°$ زاويو مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړئ.

23 مثال) په متساوي الاضلاع مثلث کې د $60°,30°$ زاويو مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړئ.

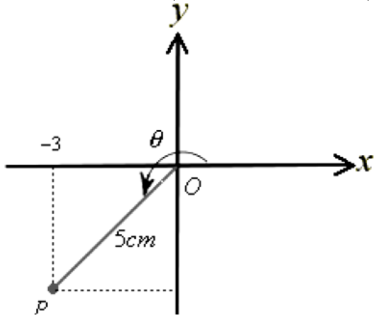
24 مثال) د يوه مستطيل د قطر طول $8cm$ او د دوو قطرونو ترمنځ يې پرته حاده زاويه $60°$ ده ددغه مستطيل مساحت څو سانتي متر مربع دی؟

25 مثال) د $45°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه په متساوي الساقين قايم الزاويه مثلث کې ترلاسه کړئ.

26 مثال) ABC مثلث د $\widehat{A}=60°$ او $AB=7$ او $AC=12$ په فرضولو سره په پام کې نيسو. د BC طول محاسبه کړئ؟

27 **مثال)** د $OP = r = 2$ په فرضولو سره د $210°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه وټاکې.

28 **مثال)** د لاندې شکل په پام کې نیولو سره د لاندې مساوات دویم لوری بشپړ کړئ.



$1)\sin\theta = \ldots$ $\quad 3)\tan\theta = \ldots$ $\quad 5)\cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \ldots$

$2)\cos\theta = \ldots$ $\quad 4)\cot g\theta = \ldots$ $\quad 6)\dfrac{\sin\theta-\tan\theta}{\cot\theta+\tan\theta} = \ldots$

29 **مثال)** که $\cot g\theta = \dfrac{5}{3}$، $r = 2\sqrt{17}$ وي او د θ ته مخامخ کمان پای په درېیمه ناحیه کې وي د p مختصات ترلاسه کړئ.

30 **مثال)** که د θ مخامخ کمان پای په لومړۍ ناحیه کې وي او $(a,b>0)\tan\theta = \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ ولرو، ثبوت کړئ چې:

$$\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta} = \sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\times\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)$$

مثال) د دوو متمم زاویو د مثلثاتي نسبتونو په پام کې نیولو سره، د لاندې مساواتو سموالی وښیئ.

$31)\sin 20° = \cos 70°$ $\quad 32)\cos 32° = \sin 58°$

$33)\tan(22°,30') = \cot g(67°,30')$ $\quad 34)\sec 27° = \csc 63°$

2 – 3) د قایم الزاویه مثلث د حل کلاسیک حالتونه

د قایم الزاویه $(\widehat{A} = 90°)$ مثلث د حل لپاره څلور اصلي حالتونه موجود دي چې د قایم الزاویه مثلث د حل لپاره کلاسیک حالتونه نومیږي.

دغه څلور حالتونه په لاندې توګه دي:

1) د وتر او یوې حاده زاویې مشخص والی.

2) د وتر او یوې ضلعې مشخصوالی.

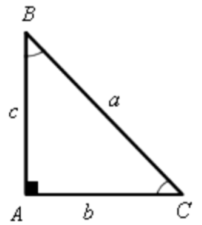
3) د یوې قایمې ضلعې او یوې حاده زاویې مشخصوالی.

4) د قائم زاویې د دوو ضلعو معلوموالی.

$a^2 = b^2 + c^2$

$$\sin \widehat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a.\sin \widehat{C}$$

$$\vdots$$



35 **مثال)** په ABC , $\left(\widehat{C} = 90^\circ\right)$ قايم الزاويه مثلث کې $AB = 24$ وتر او $\widehat{B} = 36^\circ$ زاويه ده مثلث حل کړئ. (لومړئ حالت)

36 **مثال)** په ABC , $\left(\widehat{C} = 90^\circ\right)$ مثلث کې $AB = 50$ او $BC = 28$ وترونه راکړل شوی دي، مثلث حل کړئ. (دويم حالت)

37 **مثال)** په ABC , $\left(\widehat{C} = 90^\circ\right)$ قايم الزاويه مثلث کې $CA = 42$ ضلع او $\widehat{A} = 52^\circ$ زاويه ده، مثلث حل کړئ. (درېيم حالت)

38 **مثال)** په ABC , $\left(\widehat{C} = 90^\circ\right)$ قايم الزاويه مثلث کې $AC = 7.5$ او $BC = 18$ ضلعې راکړل شوي مثلث حل کړئ. (څلورم حالت)

4 . مثلثاتي دايره

4 – 1) د مثلثاتي دايرې تعريف

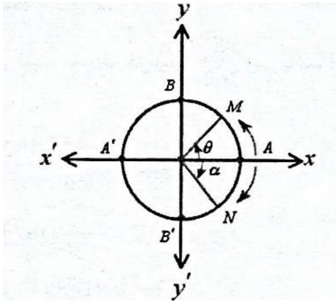
په مختصاتي سيستم کې مو وليدل چې که P نقطه له مبدا څخه بيل په پام کې ونيسو کولی شو د دې نقطې څخه د مولد شعاع او د محور مثبت جهت ترمنځ مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړو، تر ټولو جالبه خو لا دا ده چې له O مبدا څخه د P نقطې واټن په محاسباتو کې هيڅ اړين نه دی.

په دې اساس کولی شو P نقطه په دغه قطعه خط داسې وټاکو چې $r = OP = 1$ وي، د O نقطې شاوخوا د OP خط له بشپړ دوران څخه واحد شعاع لرونکې دايره منځته راځي چې مثلثاتي دايره ورته وايي، يعنې مثلثاتي دايره هغه دايره ده چې شعاع يې يو واحد وي.

ددې دايرې پرمخ A نقطه (د $A'A$ قطر د ښي لوري پای) د کمان پيل په پام کې نيسو.

که کمان له A نقطې څخه د ساعت د عقربې خلاف، د دايرې پر محيط حرکت وکړي، ددې کمان مخامخ چې کومه زاويه جوړيږي مثبت ده او که چېرې له A نقطې څخه د ساعت د عقربې مطابق د دايرې د محيط پرمخ حرکت وکړي، د کمان مخامخ جوړه شوې مرکزي زاويې ته منفي زاويه وايي.

په لاندې شکل کې θ مثبت عدد او α منفي عدد دی.



1) په پاسني شکل کې $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$, $B'(0,-1)$ دی.

2) که د θ مرکزي زاویې مخامخ کمان پای په A نقطه (د پیل نقطه) کې پروت وي، د θ اندازه مساوي په $0°$ یا صفر رادیان ده.

3) که د θ مرکزي زاویې مخامخ کمان پای په B نقطه کې وي، د θ اندازه مساوي په $90°$ یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان ده.

4) که د θ مرکزي زاویې مخامخ کمان پای په A' نقطه کې وي، د θ اندازه مساوي په $180°$ یا π رادیان ده.

5) که د θ مرکزي زاویې مخامخ کمان پای په B' نقطه کې وي، د θ اندازه مساوي په $270°$ یا $\frac{2\pi}{2}$ رادیان ده.

6) که د θ مرکزي زاویې مخامخ کمان یو بشپړ دوران وهلی وي او A نقطې ته رسېدلی وي، د θ اندازه مساوي په $360°$ یا 2π رادیان ده.

(د کمان طول)

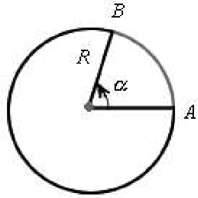
په R شعاع لرونکې دایره کې د هغه کمان طول چې مرکزي زاویه یې α رادیان وي، په لاندې توګه محاسبه کېږي:

$\widehat{AB} = \alpha R$

په حقیقت کې د کمان طول د دایرې له شعاع او مرکزي زاویې(د rad له جنسه) سره مستقیم نسبت لري.

$\widehat{AB} = \alpha R$ ته په پام سره د یوې دایرې محیط په لاندې توګه محاسبه کېږي:

محیط $= 2\pi R$



په دایره کې، د زاویې ته مخامخ کمان طول مساوي په $1rad$ دی، هر $1rad$ تقریبا مساوي په $57°$ دی.

39 **مثال)** په هغه دایره کې چې شعاع یې 5 واحده ده، د مرکزي زاویې مخامخ طول مساوي په $\frac{\pi}{2}$ دی، د زاویې اندازه څومره ده؟

(د دایرې د قطاع مساحت)

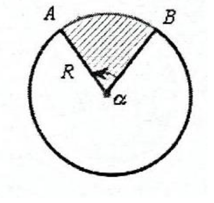
قطاع د دایرې هغه برخه ده چې د دوو شعاعو ترمنځ پرته وي.

که د دایرې مساحت په 360 برخو وویشو، د هرې برخې مساحت $\frac{\pi R^2}{360}$ دی، په حقیقت کې πR^2 د دایرې مساحت دی.

د قطاع د مساحت ترلاسه کولو لپاره لرو چې:

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \times \alpha^\circ \Rightarrow S = \frac{\pi R^2}{360} \times \frac{180}{\pi} \alpha(rad)$$

$$\Rightarrow S = \frac{R^2 \alpha}{2} (rad)$$



په حقیقت کې د R شعاع لرونکې دایرې د α رادیان قطاع مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$$

(د دایرې د قطعې مساحت)

قطعه د دایرې هغه برخه ده چې د وتر او کمان ترمنځ پرته وي.

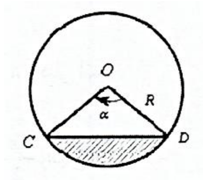
S_1 د دایرې قطاع او S_2 د مثلث مساحت دی.

(د قطعې مساحت) $S = S_1 - S_2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} R^2 \alpha - \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \alpha$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} R^2 \alpha - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} R^2 \alpha - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$$



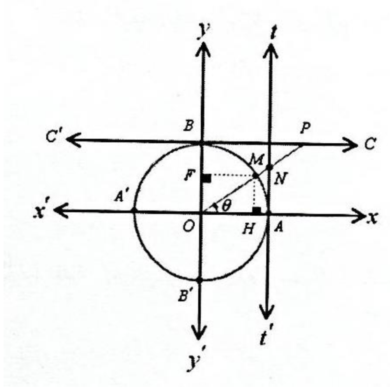
40 **مثال)** په دغه شکل کې د تورې شوې برخې مساحت څومره دی؟ د دايرې شعاع R ده او مثلث متساوي الاضلاع دی.

2 – 4) په مثلثاتي دايره کې د يوې زاويې د مثلثاتي نسبتونو محاسبه

مثلثاتي دايره چې مرکز يې د مختصاتو مبداء او A (د $A'A$ افقي قطر ښی پای) د کمان د پيل نقطه وي، په پام کې نيسو.

د هر يوه مثلثاتي نسبت لپاره، ځانګړی محور موجود دی.

- عمودي محور $(y'Oy)$ د ساين محور.
- افقي محور $(x'Ox)$ د کوساين محور.
- $t'At$ محور چې د دايرې پر A نقطه مماس دی د تانجانت محور دی.
- $c'Bc$ محور چې د دايرې پر B نقطه مماس دی د کوتانجانت محور دی.



په لاندې شکلونو کې د زاويو مثلثاتي نسبتونه په بيلابيلو حالتونو کې ښودل شوي او دايره، مثلثاتي دايره په پام کې نيول شوې.

✓ 1) M نقطه په لومړۍ ناحيه کې د θ مرکزي زاويې د مخامخ کمان د پای نقطه ده:

فرض کړې M (له B', A', B, A نقطو څخه پرته) د دايرې پرمحيط د خوښې وړ يوه نقطه وي او θ هغه مرکزي زاويه وي چې OM شعاع يې له OA مثلثاتي جهت سره جوړوي.

OM شعاع ته د M لخوا امتداد ورکوو ترڅو د تانجانت او کوتانجانت محورونه په N او P نقطو کې قطع کړي.

له M څخه MF او MH عمودونه په ترتيب د ساين او کوساين محورونو ته رسموو.

ليدل کيږي چې:

$\sin\theta = \overline{OF} \quad , \quad \cos\theta = \overline{OH} \quad , \quad \tan\theta = \overline{AN} \quad , \quad \cot\theta = \overline{BP}$

پاسني مساوات ښيي چې که M د θ زاويې مخامخ کمان پای وي او وغواړو چې د θ مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړو، د $\sin\theta$ د ترلاسه کولو لپاره له M څخه په ساين محور(عمودي محور) MF عمود رسموو او د OF قطعه خط الجبري اندازه د $\sin\theta$ په توګه منو.

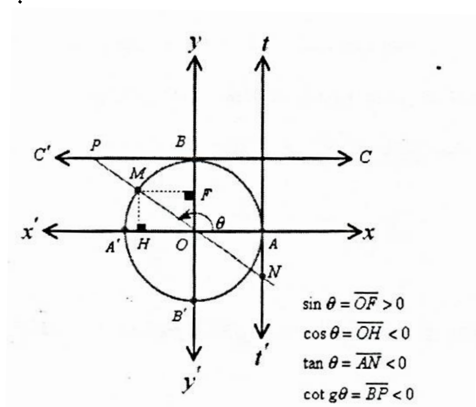
د $\cos\theta$ د ترلاسه کولو لپاره له M څخه پر کوساين محور (افقي محور) MH عمود رسموو او د OH قطعه خط الجبري اندازه د $\cos\theta$ په توګه منو.

د $\tan\theta$ د ترلاسه کولو لپاره OM قطعه خط ته له يوې خوا څخه داسې امتداد ورکوو څو د تانجانت محور($t'At$محور) په N نقطه کې قطع کړي او د AN قطعه خط الجبري اندازه د $\tan\theta$ په توګه منو.

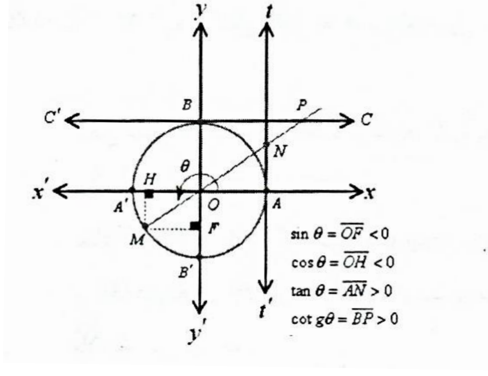
د $\cot\theta$ د ترلاسه کولو لپاره OM قطعه خط ته له يوې خوا داسې امتداد ورکوو، چې د کوتانجانت محور($c'Bc$ محور) په P نقطه کې قطع کړي او د BP قطعه خط اندازه د $\cot\theta$ په توګه منو.

د يادونې وړ ده چې که د θ مرکزي زاويې مخامخ کمان پای د مثلثاتي دايرې په لومړۍ ناحيه کې پروت وي، ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت دي.

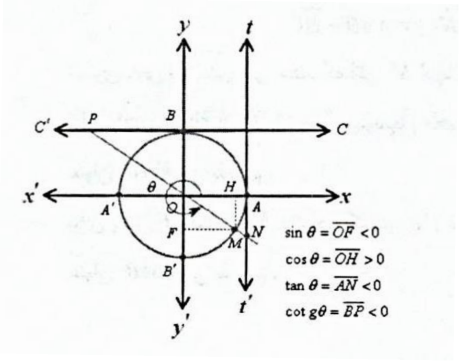
2) د θ مرکزي زاويې مخامخ کمان د پای M نقطه، په دويمه ناحيه کې پرته ده:



3) د θ مرکزي زاويې مخامخ کمان د پای M نقطه، په دريیمه ناحيه کې پرته ده:



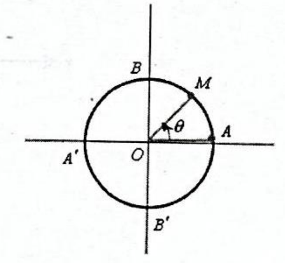
4) د θ مرکزي زاويې مخامخ کمان د پای M نقطه، په څلورمه ناحيه کې پرته ده:



3 – 4) يادونې

که M د مثلثاتي دايرې پرمحيط پرته نقطه وي او د AM کمان مخامخ θ مرکزي زاويه د راديان لـه جنسه وي، ممکن متحرک د حرکت د پيل نقطې يعنې A څخـه يـوه مکمـل دوران وهلـی او بېرتـه M نقطې ته رسېدلی وي، په دې حالت کې د زاويې مقدار $2\pi+\theta$ دی.

ممکن متحرک د پيل نقطې څخه دوه بشپړ دورانونه کړي وي او بيا M نقطې تـه رسـيدلی وي پـه دې حالت کې د زاويـې مقـدار $2\times 2\pi+\theta = 2\pi+\theta$ دی او... پـه حقيقـت کـې زاويـه د يـوه $k\in\mathbb{Z}$ لپاره له $2k\pi+\theta$ فورمول څخه محاسبه کيږي.



ضمناً کېدای شي متحرک لومړی يو مکمل دوران د مثلثاتي جهت خلاف وهلی وي او بېرته M نقطې ته رسېدلی وي په دې حالت کې د زاويې مقدار $-2\pi+\theta$ او وروستۍ دوره يې $-4\pi+\theta$ او ... کيږي.

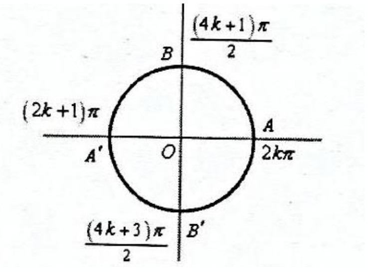
د مثلثاتي دايرې پرمخ څلور B', A', B, A نقطې کېـدای شي د پرتلـه کولـو اساس وي، نـو د راديـان معادل اندازې بايد زده کړو.

I. که د راديان له جنسه θ مرکزي زاويې ته د مخامخ کمان پای په A نقطه کې وي، اندازه يـې $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ده.

II. کـه د راديـان لـه جنسـه θ مرکـزي زاويـې تـه د مخـامخ کـمان پـای پـه B نقطـه کـې وي، انـدازه يـې $2k+\frac{\pi}{2}=\left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ده.

III. که د رادیان له جنسه θ مرکزي زاویې ته د مخامخ کمان پای په A' نقطه کې وي، اندازه یې $(k \in \mathbb{Z})\ 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$ ده.

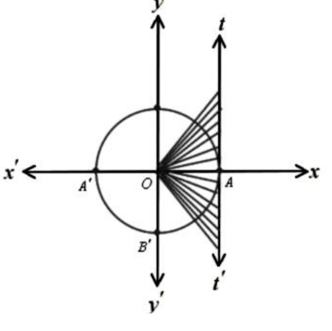
IV. که د رادیان له جنسه θ مرکزي زاویې ته د مخامخ کمان پای په B' نقطه کې وي، اندازه یې $(k \in \mathbb{Z})\ 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{(4k+3)\pi}{2}$ ده.



که θ مرکزي زاویې ته د مخامخ کمان پای نقطه، د مثلثاتي دایرې د محیط په هره برخه کې پرته وي، د هغه زاویې لپاره $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د تعریف وړ دي او مثلثاتي دایرې ته په پام سره:

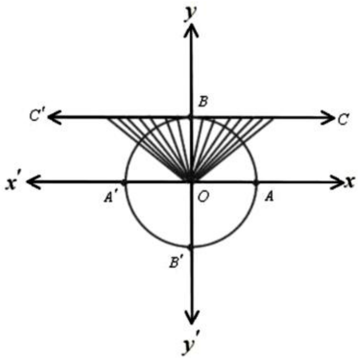
$$\forall\theta : \begin{cases} -1 \le \sin\theta \le 1 \\ -1 \le \cos\theta \le 1 \end{cases}$$

که د θ مرکزي زاویې د مخامخ کمان د پای نقطه د مثلثاتي دایرې د محیط په هر نقطه کې واقع وي (پرته له B', B نقطو څخه)، $\tan\theta$ د تعریف وړ دی او مقدار یې کېدای شي هر حقیقي عدد وي.



$$\theta \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$$

که د θ مرکزي زاویې مخامخ کمان د پای نقطه د مثلثاتي دایرې د محیط په هر نقطه کې واقع وي (پرته له A او A' نقطو څخه)، $\cot\theta$ د تعریف وړ دی او مقدار یې کېدای شي هر حقیقي عدد وي.



$\theta \neq k\pi \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$

د مثلثاتي نسبتونو جدول (4 – 4)

درجه	$0°$	$15°$	$22/5°$	$30°$	$45°$	$60°$	$67/5°$	$75°$	$90°$	$180°$	$270°$
راديان	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	-1	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$2+\sqrt{3}$	تعريف نه دی	0	تعريف نه دی
cot	تعريف نه دی	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{3}$	0	تعريف نه دی	0

41 **مثال)** د $150°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه په مثلثاتي دايره کې محاسبه کړئ.

42 **مثال)** که $30° \leq \theta \leq 120°$ وي، $\sin\theta$ د کومو دوو اعدادو ترمنځ بدلون کوي؟

43 **مثال)** که $45° \leq \theta \leq 225°$ بدلون وکړي او $\cos\theta = 2+m$ وي، د m د بدلون حدود وټاکئ.

44 **مثال)** که $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ بدلون وکړي او $\tan\theta = m-1$ وي، د m د بدلون حدود وټاکئ.

5. مثلثاتي مطابقت

هر هغه مساوات چې مثلثاتي نسبتونه پکې کارول شوي وي او د زاويې ټولو قيمتونو ته صدق وکړي، يو مثلثاتي مطابقت نوميږي.

مخکې له هرڅه، اصلي مثلثاتي مطابقتونه در پېژنو او وروسته يې په ثبوت پيل کوو.

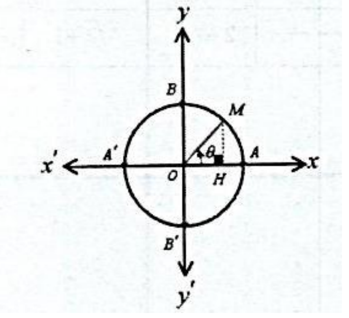
$$1)\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} \end{cases}$$

ثبوت

فرضوو چې M نقطه د مثلثاتي دايرې پرمحيط په لومړي ربع کې پرته وي.

$\sin\theta = \overline{HM} \quad , \quad \cos\theta = \overline{OH}$

$HM^2 + OH^2 = OM^2 \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

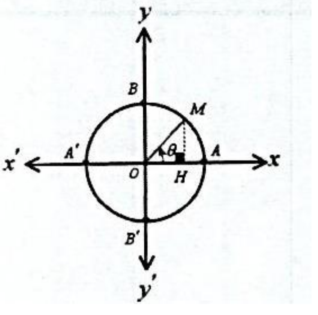


$$2)\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \tan^n\theta = \frac{\sin^n\theta}{\cos^n\theta} \quad ; \quad \theta \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ثبوت

یعنې $\pi\frac{(2k+1)}{2} \neq \theta$ وي، په دې صورت کې په OMH قائم الزاویه مثلث کې لروچې: پـه لانـدې شکل کې فرضوو چې M نقطه په B یا B' نقطو کې نه وي پرته:

$$\Delta OMH : \tan\theta = \frac{\text{مخامخ ضلع}}{\text{ګاونډې ضلع}} = \frac{\overline{HM}}{OH} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

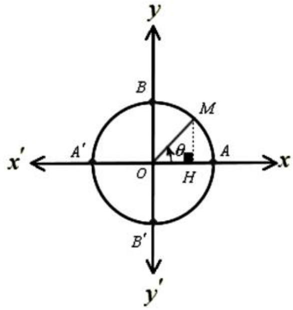


$$3)\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \cot^n\theta = \frac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta} \quad ; \quad \theta \neq k\pi \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ثبوت

په لاندې شکل کې که M نقطه په A یا A' نقطو کې نه وي، یعنې $\theta \neq k\pi$ وي، په دې صورت کې په OMH قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\Delta) OMH : \cot\theta = \frac{\text{ګاونډې ضلع}}{\text{مخامخ ضلع}} = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



$$4)\ \tan\theta\cdot\cos\theta=1 \Rightarrow \begin{cases}\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}\\ \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}\end{cases}\quad;\quad \theta\neq\frac{k\pi}{2}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

ثبوت

$$\left.\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{cases}\right\rangle\ \tan\theta\cdot\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=1$$

$$5)\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$$

ثبوت

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$6)\ 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow \sin^2\theta=\frac{1}{1+\cot^2\theta}=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

ثبوت

$$1+\cot^2\theta=1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$7)\ \sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta$$

ثبوت

(يادونه) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$\begin{aligned}\sin^4\theta+\cos^4\theta&=(\sin^2\theta)^2+(\cos^2\theta)^2\\ &=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\\ &=1-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\end{aligned}$$

$$8)\ \sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta$$

ثبوت

(یادونه) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \Rightarrow a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta = (\sin^2\theta)^3+(\cos^2\theta)^3$$
$$= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-3\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$= 1-3\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta$$

9) که $\theta \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$ وي، د $\cos\theta$ معکوس ته د θ سکینټ وايي او په $\sec\theta$ شکل يې ښيي، نو:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \sec^n\theta = \frac{1}{\cos^n\theta}$$

10) که $\theta \neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ وي، د $\sin\theta$ معکوس ته د θ کوسکینټ وايي او په $\mathrm{cos}ec\theta$ يا لنډيز ډول $\csc\theta$ يې ښيي، نو

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \csc^n\theta = \frac{1}{\sin^n\theta}$$

11) $\cos^4\theta-\sin^4\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta \Rightarrow \cos^4\theta+\sin^4\theta+\cos^2\theta$

ثبوت

$$\cos^4\theta-\sin^4\theta = \left(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}\right)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$= \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

12) $\tan\theta+\cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$

ثبوت

$$\tan\theta+\cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

13) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

ثبوت

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

14) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$

ثبوت

$$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta \cdot \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$$

15) فرض کړئ a او b دوه د خوښې وړ حقيقي اعداد وي، داسې چې $b \neq 0$ وي په دې صورت کې:

$$if \quad \tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

ثبوت

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1+\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow 1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=> \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=> \sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$=> \sin\theta = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال) د لاندې مطابقتونو سموالی وښيئ.

45) $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

46) $\sec^2\frac{\pi}{6}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) + \csc^2\frac{\pi}{6}\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{14+6\sqrt{3}}{3}$

47) $\frac{\csc x\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + \frac{\sec x\cot^2 x}{1+\cot^2 x} = \sin x + \cos x$

48) $\frac{\tan x}{\cot^2 x\sec^2 x} + \frac{\cot x}{\tan^2 x\csc^2 x} - \sec x\cdot\csc x = -2\sin x\cdot\cos x$

49) $\frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A}{\cot B}$

50) $\frac{1-\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x + 2} = (\cos x) - (\sin x)$

51) $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1+\sin x\cos x} = \cos x - \sin x$

52) $\sqrt{1+2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}} = |\sin x - \cos x| \quad ; \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

53) $\frac{1}{1-\tan 10^0} + \frac{1}{1-\tan 80^0} = 1$

54) $\sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x = 0$

55) $\sqrt{1-2\sqrt{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}} = -\sin\theta + \cos\theta \quad , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

56) $\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^6 x$

57) $\sqrt{\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} = -\sin\alpha \quad ; \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

58) $\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2} = -\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} \quad ; \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

59) $\sec^2\theta - \csc^2\theta = \dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$

60) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \left|\sec\theta + \tan\theta\right|$

61) $\sin^2 x + \tan^2 x \cdot \sin^2 x = \tan^2 x$

62) $\sin\alpha \cdot \tan^2\alpha \cdot \cot^3\theta = \cos\alpha$

63) $\cos^2 a\left(\dfrac{1}{\cos a} + \tan a\right)\left(\dfrac{1}{\cos a} - \tan a\right) + 2\tan^2 a \cdot \cos^2 a = 1 + \sin^2 a$

64) $\dfrac{1}{\sin^4 x} + \dfrac{1}{\tan^4 x} = 1 + \dfrac{2\cot^2 x}{\sin^2 x}$

65) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)} = \dfrac{2\tan x}{\tan x - 1}$

66) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha(1+\tan\alpha)(1+\cot\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

67) $\left(\dfrac{\cos a}{\tan a} + \dfrac{\sin a}{\cot a}\right)\sin a\cos a = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a\cos a)$

68) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$

69) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} = 2\tan x \quad ; \quad 0 \le x \le 90^0$

70) $\dfrac{2\left(1-\sin^3 x - \cos^3 x\right)}{\sin x + \cos x + 2} = (1 - \sin x - \cos x)^2$

71) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2} = \dfrac{1}{(1+\cos\alpha)\left(3+\cot^2\alpha + 3\tan^2\alpha + \tan^4\alpha\right)}$

72) $\dfrac{\sin^2 x\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + \dfrac{\cos^2 x \cdot \cot^2 x}{1+\cot^2 x} + 2\cos^2 x - 2\cos^4 x = 1$

73) $\tan x\left(\cot x + 2\cos^2 x\right) = (\sin x + \cos x)^2$

74) $\dfrac{\tan^3 x}{\sin^2 x} + \dfrac{\cos^3 x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \tan^3 + \cot^3 x$

75) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = \dfrac{4\tan x}{\cos x}$

76) $\dfrac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x} + \dfrac{\cot^3 x}{1+\cot^2 x} = \dfrac{1-2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$

77) $\sin^8 x + \cos^8 x + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 + 2\sin^4 x \cdot \cos^4 x$

78) $\dfrac{a\tan^2 a + c}{a\sin^2 a + c\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$

79) $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$

80) $(\sin^6 x + \cos^6 x - 1)^3 = -27\sin^6 x\cos^6 x$

81) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\tan^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{1+\cot^2 x} = \tan^2 x + 1 - \sec^2 x$

82 **مثال**) له دغه مساواتو څخه $\sin\theta + \csc\theta = 2$ $\cos\theta$ ترلاسه کړئ.

83 **مثال**) له دغه مساواتو څخه $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ $\tan x$ ترلاسه کړئ.

84 **مثال**) له $\sin 15° \times \cos 15° = \dfrac{1}{4}$ مساواتو څخه د $15°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

85 **مثال**) که $\tan x + \cot x = \dfrac{17}{4}$ وي، د $\tan x \geq 4$ لپاره د x مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړئ.

86 **مثال**) $3\cot^2 x - 5\tan x \cdot \cos x$ افاده د $\sin x$ له جنسه وليکئ.

87 **مثال**) د لاندې افادو تر ټولو لږ او ډير قيمت ترلاسه کړئ.

الف) $A = 5 - 3\sin x$

ب) $B = 3 + 7\cos x$

88 **مثال**) د θ مرکزي زاويې د مخامخ کمان پای بايد په کومه ناحيه کې وي ترڅو $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \dfrac{1}{\cos\theta} - \tan\theta$ مساوات د $\theta \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ لپاره صدق وکړي؟

89 **مثال**) که $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ او $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ وي د $\dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - 9\cos\alpha}$ کسر قيمت ترلاسه **کړئ**.

90 **مثال**) که $\cot\theta = \dfrac{p}{q}$ وي، د $\dfrac{p\sin\theta - q\sin\theta}{p\cos\theta + q\sin\theta}$ کسر قيمت ترلاسه کړئ.

91 **مثال**) که $p\cot\theta = \sqrt{q^2 - p^2}$ وي $\sin\theta$ ترلاسه کړئ.

92 **مثال**) که $\tan\theta = \dfrac{2pq}{p^2 - q^2}$ وي $\cos\theta$ او $\dfrac{1}{\sin\theta}$ محاسبه کړئ.

93 **مثال**) که $\dfrac{\sin B}{\sin A} = \sqrt{2}$ او $\dfrac{\tan B}{\tan A} = \sqrt{3}$ وي B, A حاده زاويې ترلاسه کړئ.

94 **مثال**) د α کمان پای د مثلثاتي دايرې په کومه ناحيه کې پروت وي ترڅو $(2\sin\alpha - 1)x^2 - 4x + 4\sin\alpha + 2 = 0$ معادله حقيقي جذر ولري؟

95 **مثال**) د $P = (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) = (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$ شرط په صورت کې ثبوت کړئ چې $P = |\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma|$ دی.

96 **مثال**) که $\sin x \cos x = -\frac{1}{4}$ وي، په دې صورت کې د $\sin x + \cos x$ قیمت ترلاسه کړئ.

97 **مثال**) د x پای په کومه ناحیه کې وي ترڅو $\tan x + \cot x = \sqrt{\sec^2 x + \csc^2 x}$ مساوات صدق وکړي؟

98 **مثال**) که $\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x - 1} \equiv a \sin x + b \cos x + c$ او $\left(x \neq 2k\pi \, , 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ وي

ثبوت کړئ چې $a = b = c = \frac{1}{2}$ دی.

99 **مثال**) که $\frac{f(x)}{\sin x} + \frac{f(x)}{\cos x}$ وي، په دې صورت کې $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ محاسبه کړئ.

100 **مثال**) که $\tan x + \cot x = 2a$ او $\tan x - \cot x = 2b$ وي، ثبوت کړئ چې $a^2 - b^2 = 1$ دی.

101 **مثال**) که $\tan^6 x + \cot^6 x = b$ او $\tan^2 x + \cot^2 x = a$ وي ثبوت کړئ چې $b = a^3 - 3a$ دی.

102 **مثال**) د $4^{\sin^2 \theta} - 4^{\cos^2 \theta} = \sqrt{2}$، په فرضولو سره $4^{\sin^2 \theta}$ ترلاسه کړئ.

103 **مثال**) که $\theta , \tan \theta = \frac{-3}{4}$ په څلورمه ربع کې وي، د θ زاويې د ټولو مثلثاتي نسبتونو قیمت ترلاسه کړئ.

104 **مثال** (104) که $\tan \theta = \frac{5}{7}$ او $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ (θ په دریمه ربع کې) وي په دې صورت کې د $\frac{-2\sin \theta + 3\cos\theta}{3\sin \theta + 5\cos\theta}$ قیمت ترلاسه کړئ.

105 **مثال**) که چیرې $\cos\theta = \frac{1-m^2}{1+m^2}$ وي، $\cot\theta$ ترلاسه کړئ $(0° < \theta < 90°)$.

106 **مثال**) کـه چیـرې $\tan^2 x = 1 + \cot^2 x$ وي، د $(\tan x - \cot x) \frac{1}{\sin x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}}$ افـادې حاصل محاسبه کړئ.

107 **مثال**) که $\tan^2 x + \cot^2 x = a$ او $\tan^4 x + \cot^4 x = b$ وي، $a^2 = b + 2$ وښيئ.

108 **مثال**) د دوو $\begin{cases} c\cos\alpha + y\sin \alpha = 1 \\ y\cos\alpha - x\sin \alpha = 0 \end{cases}$ دوه مجهوله معادلو سیستم حل کړئ (x او y د سیستم مجهولونه دي).

109 **مثال**) د $x^2 \sin \alpha \cdot \cos\alpha + x + \sin \alpha \cdot \cos\alpha = 0$ معادلې جذرونه ترلاسه کړئ.

110 **مثال)** a او b داسې وټاکئ څـو $(a+b\sin x-b\cos x)^2=2(1-\sin x)(1+\cos x)$ رابطـه تل صدق وکړي.

111 **مثال)** د لاندې کمانونو پای د k ټولو قیمتونو ته داسې وټاکئ چې $x=k\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ صدق وکړي.

112 **مثال)** ثبوت کړئ چې د a ټولو قیمتونو ته $\cos x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ صدق کوي. $(a\in R)$

113 **مثال)** کـه $\dfrac{\pi}{6}\le x<\dfrac{3\pi}{4}$ وي، د b قیمـت داسـې وټـاکئ چـې $\sin x=1-2b$ صـدق وکـړي. $(b\in R)$

114 **مثال)** که $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{p}$ او ($p\in\mathbb{N}$) وي د α کمان پای باید د مثلثاتي دایـرې پـه کومـه ناحیه کې پروت وي؟

مثال) د x کمان پای باید په کومه ناحیه کې پروت وي، ترڅو لاندې مثلثاتي مطابقتونه صدق وکړي؟

115) $\tan x+\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\dfrac{1}{\cos x}$ 116) $\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\tan x+\cot x$

117 **مثال)** له $\cos x=\sqrt{\dfrac{\cot x}{a+\cot x}}$ رابطې څخه د $\tan x$ قیمت د a له جنسه ترلاسه کړئ.

118 **مثال)** له $\sin\alpha=\dfrac{m-1}{m+1}$ او $\cot\alpha=\dfrac{m}{m-1}$ رابطو څخه، د m قیمت او په مثلثاتي دایره کې د α کمان پای وټاکئ. $(m>0)$

119 **مثال)** که $\tan\alpha=\dfrac{p}{q+1}$ او $\cot\alpha=\dfrac{2}{p-3}$ وي د p او q ترمنځ رابطه ترلاسه کړئ.

120 **مثال)** که $\cos A=\dfrac{3}{5}$ وي، ثبوت کړئ چې $\cot A+\dfrac{1}{\sin A}=2$ $\left(0<A<\dfrac{\pi}{2}\right)$ دی.

121 **مثال)** که $\sin A-\cos A=0$ وي، د $\dfrac{1}{\sin A}$ قیمت ترلاسه کړئ.

122 **مثال)** ثبوت کړئ چې د $\sin\theta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ او $\cos\theta-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ د مربعـاتو مجمـوع مساوي په 2 ده.

مثال) په لاندې هر یوه سیستم کې د b,a (پارامترونو) ترمنځ داسې رابطه ترلاسه کړئ چې له x څخه خپلواکه وي.

123) $\begin{cases} \tan x + \dfrac{1}{\cos x} = a \\ \dfrac{1}{\cos x} - \tan x = b \end{cases}$ 124) $\begin{cases} \tan x + \dfrac{1}{\sin x} = a \\ \dfrac{1}{\sin x} - \tan x = b \end{cases}$

125) $\begin{cases} \tan^2 x + \cot^2 x = a \\ \tan^4 x + \cot^4 x = b \end{cases}$ 126) $\begin{cases} a\cos\theta + b\sin\theta = c \\ a'\cos\theta + b'\sin\theta = c' \end{cases}$

127) $\begin{cases} \dfrac{ax}{\cos\theta} - \dfrac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \\ \tan\theta = c \end{cases}$ 128) $\begin{cases} \dfrac{\sec^2\theta - 1}{\sec^4\theta + 1} = \dfrac{x}{a} \\ \sec^2\theta + \cos^2\theta = \dfrac{2b}{y} \end{cases}$

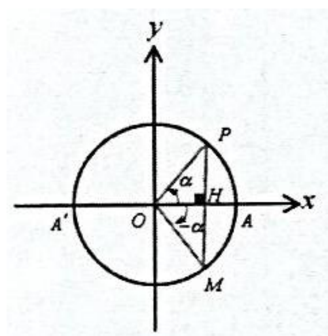
129 **مثال)** له $\begin{cases} a\sin x + b\cos x = 2c \\ b\sin x - a\cos x = c \end{cases}$ سیستم څخه $a^2 + b^2 = 5c^2$ رابطه ثبوت کړئ.

6 . په بيلابېل حالتونو کې د دوو کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ رابطه

6 – 1) د دوو معکوسو کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه $(-\alpha, \alpha)$

فرضوو چې P د α مرکزي زاويې مخامخ کمان د پای نقطه وي او M د $-\alpha$ مرکزي زاويې(هغه زاويه چې د مثلثاتي جهت خلاف جوړه شوې وی) د مخامخ کمان د پای نقطه وي.

دوه OPH او OMH قايم الزاويه مثلثونه په وتر او يوه حاده زاويه کې سره مساوي دي او $\overline{HM} = -\overline{HP}$



$$\sin(-\alpha) = \frac{\overline{HM}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{HM}}{1} = -\overline{HP} = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}} = \overline{OH} = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

په لنډيز ډول لرو چې:

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

130 **مثال)** د (-60^0) مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

2 – 6) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې مجموع یې π کیږي $(\pi-\alpha\,,\alpha)$

فرضوو چې α او $\pi-\alpha$ دوه زاويې او $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ وي.

غواړو د α او $\pi-\alpha$ زاويو ترمنځ مثلثاتي نسبتونو وټاکو.

فرضوو چې P د α زاويې مخامخ کمان پای وي او M د $\pi-\alpha$ زاويې مخامخ کمان پای وي.

د دوو OPH او OMN قايم الزاويه مثلث شکل ته پام وکړئ چې د وتر او يوې حاده زاويې له اړخه سره مساوي دي:

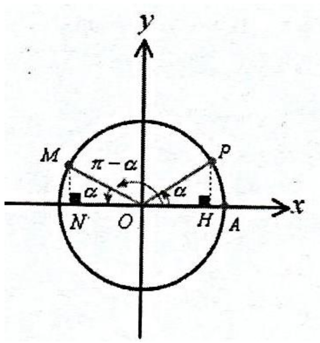
$$\overline{NM}=\overline{HP}\ ,\ \overline{ON}=-\overline{OH}$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\overline{NM}=\overline{HP}=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=\overline{ON}=-\overline{OH}=-\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-a)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot a$$



په لنډه توګه لرو:

$$\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha\end{cases}$$

مثلاً:

$$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\cot 165^\circ=\cot(180^\circ-15^\circ)=-\cot 15^\circ$$

131 **مثال)** د $135°$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

132 **مثال)** د $-\dfrac{3\pi}{4}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

3 – 6) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه چې تفاضل يې π کيږي $(\pi+\alpha,\alpha)$

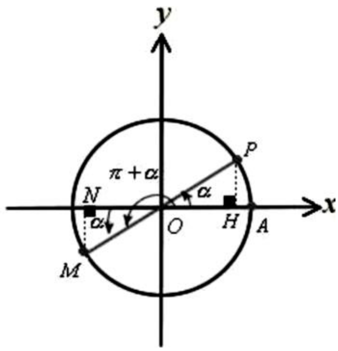
فرضوو چې α او $\pi+\alpha$ دوې زاويې او $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ وي.

غواړو د α او $\pi+\alpha$ زاويو ترمنځ مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړو.

فرضوو چې P د α زاويې مخامخ کمان پای وي او M د $\pi+\alpha$ زاويې مخامخ کمان پای وي.

دوه OPH او OMN قايم الزاويه مثلثونه په وتر او يوه حاده زاويه کې سره مساوي دي او $\overline{NM} = -\overline{HP}$, $\overline{ON} = -\overline{OH}$.

$$\sin(\pi+\alpha) = \overline{NM} = -\overline{HP} = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = \overline{ON} = -\overline{OH} = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \frac{\sin(\pi+a)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot a$$



په لنډيز ډول لرو:

$$\begin{cases}\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \\ \cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha\end{cases}$$

مثلاً:

$$\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \tan 45° = 1$$

$$\cot 210° = \cot(180° + 30°) = \cot 30° = \sqrt{3}$$

133 **مثال)** د $240°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

4 – 6) **د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه چې مجموع يې 2π کيږي** $(2\pi - \alpha , \alpha)$

پوهيږو چې $(\pi - \alpha) + \pi = 2\pi - \alpha$ دی. د پخوانيو مفاهيمو په يادولو او د $\pi + x$ او $\pi - x$ مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره به ولرو چې:

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin[\pi + (\pi - \alpha)] = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos[\pi + (\pi - \alpha)] = -\cos(\pi - \alpha) = -(-\cos\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(2\pi - \alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$
$$\cot(2\pi - \alpha) = \frac{\cos(2\pi - a)}{\sin(2\pi - a)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

په لنډيز ډول لرو:

$$\begin{cases} \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

مثلاً:

$$\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

134 **مثال)** د $330°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړئ.

5 – 6) **د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه چې تفاضل يې 2π کيږي** $(2\pi + \alpha , \alpha)$

پوهيږو چې $(\pi + \alpha) + \pi = 2\pi + \alpha$ دی، د $\pi + x$ مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره به ولرو:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin[\pi + (\pi + \alpha)] = -\sin(\pi + \alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos[\pi + (\pi + \alpha)] = -\cos(\pi + \alpha) = -(-\cos\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(2\pi + \alpha) = \frac{\sin(2\pi + \alpha)}{\cos(2\pi + \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$
$$\cot(2\pi + \alpha) = \frac{\cos(2\pi + \alpha)}{\sin(2\pi + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

په لنډيز ډول لرو:

$$\begin{cases} \sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha \\ \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha \\ \tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha \\ \cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha \end{cases}$$

مثلاً:

$$\sin 390^\circ=\sin(360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos 405^\circ=\cos(360^\circ+45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 420^\circ=\tan(360^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

يادونه

په ټوليز حالت کې د $2k\pi+\theta$ مثلثاتي نسبتونو د قيمت محاسبې لپاره په لاندې توګه عمل کوو.

$$\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta \qquad \tan(2k\pi+\theta)=\tan\theta$$

$$\cos(2k\pi+\theta)=\cos\theta \qquad \cot(2k\pi+\theta)=\cot\theta$$

دوې مهمې پايلې

د مثلثاتي نسبت قيمت د محاسبې پر مهال:

1) د π جفت مضربونه کولی شو حذف کړو.

2) د π تاق مضربونو پرځای کولی شو π عدد وضع کړو.

$$\sin\left(\frac{73\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{(72+1)\pi}{3}\right]=\sin\left(\frac{72\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(24\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\tan\left[\frac{(6+1)\pi}{6}\right]=-\tan\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\left(+\tan\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cot\left[\frac{(12-1)}{6}\right]=\cot\left(\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cot\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{51\pi}{4}\right)=\cos\left[\frac{(52-1)\pi}{4}\right]=\cos\left(13\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{53\pi}{3}\right)=\cos\left[\frac{(52+1)\pi}{4}\right]=\cos\left(13\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sin(-32\pi+\theta)=\sin\theta$$

$$\sin(43+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(-21\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

6 – 6) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې تفاضل یې $\frac{\pi}{2}$ کیږي $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\,,\alpha\right)$

فرضـوو چـې a او $\frac{\pi}{2}+\alpha$ دوې زاویــې وي ($0 < a < \frac{\pi}{2}$)، غـواړو د α او $\frac{\pi}{2}+\alpha$ زاویـو مثلثـاتي نسبتونه محاسبه کړو.

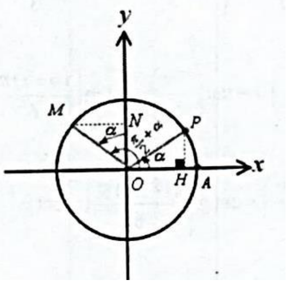
فرضوو چې P د α زاویې مخامخ کمان پـای وي او M د $\frac{\pi}{2}+\alpha$ زاویـې مخـامخ کـمان وي پـه دې صورت کې دوه OPH او OMN قایم الزاویه مثلثونه چې وتر او یوه زاویه یـې سره مسـاوی دي وینـو، او په متناظر اجزاوو کې، یعنې $\overline{NM} = -\overline{HP}$ او $\overline{ON} = \overline{OH}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \overline{ON} = \overline{OH} = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \overline{NM} = -\overline{HP} = -\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$



په لنډه توګه:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha \end{cases}$$

مثلاً:

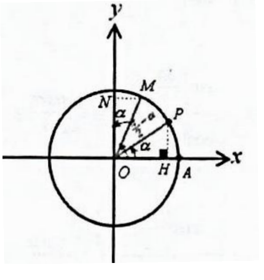
$$\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 120° = \tan(90° + 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$$
$$\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cot 150° = \cot(90° + 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$$

7 – 6) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه چې مجموع يې $\frac{\pi}{2}$ کيږي $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha , \alpha\right)$

فرضوو a او $\frac{\pi}{2} - \alpha$ دوې زاويې وي ($0 < a < \frac{\pi}{2}$)، اوس غواړو د α او $\frac{\pi}{2} - \alpha$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ رابطه ترلاسه کړو.

فرضوو چې P د α زاويې مخامخ کمان پای وي او M د $\frac{\pi}{2} - \alpha$ زاويې مخامخ کمان وي په دې صورت کې دوه OPH او OMN قايم الزاويه مثلثونه چې وتر او يوه زاويه يې سره مساوی دي وينو، او په متناظر اجزاوو کې، يعنې $\overline{HP} = \overline{NM}$ ، $OH = ON$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{ON} = \overline{OH} = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{NM} = \overline{HP} = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$



په لنډيز ډول:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha \end{cases}$$

مثلاً:

$$\sin 30^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\sin 15^\circ=\sin(90^\circ-75^\circ)=\cos 75^\circ$$

$$\cos 45^\circ=\cos(90^\circ-45)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

6 – 8) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه چې تفاضل يې $\frac{3\pi}{2}$ کيږي $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha,\alpha\right)$

$$\frac{3\pi}{2}+\alpha=\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

د $\pi+x$ او $\frac{\pi}{2}+x$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو د محاسبې فورمولونو ته په کتو سره لرو چې:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-(\cos\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

په لنډيز ډول لرو چې:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha \end{cases}$$

9 – 6) د هغه کمانونو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکه چې مجموع یې $\frac{3\pi}{2}$ کیږي $\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\,,\alpha\right)$

$$\frac{3\pi}{2}-\alpha = \pi + \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -(\cos\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -(\sin\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$

په لنډ ډول لرو چې:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha \end{cases}$$

10 – 6) د فورمولونو لنډيز

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ د کمان پای تل په دويمه ربع کې دی	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$ د کمان پای تل په درېيمه ربع کې دی
$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ د کمان پای تل په څلورمه ربع کې دی	$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha$ د کمان پای تل په لومړۍ ربع کې دی
$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$ د کمان پای تل په لومړۍ ربع کې دی	$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ د کمان پای تل په څلورمه ربع کې دی
$\sin(k\pi+\alpha)=(-1)^k\sin\alpha; k\in Z$	$\sin(k\pi-\alpha)=(-1)^{k+1}\sin\alpha; k\in Z$

$\cos(k\pi+\alpha)=(-1)^k\cos\alpha$ $\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha$ د $k\pi+\alpha$ تـه مخـامخ کـمان پـای تـل پـه دریمه ربع کې دی	$\cos(k\pi-\alpha)=(-1)^k\cos\alpha$ $\tan(k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ د $k\pi-\alpha$ تـه مخـامخ کـمان پـای تـل پـه څلورمه ربع کې دی
$\sin(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right]=(-1)^k\cos\alpha$ $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right]=(-1)^{k+1}\sin\alpha$ $\tan\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right]=-\cos\alpha$ $\cot\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right]=-\tan\alpha$

يادونه

د $k\pi\pm a$ او $2k\pi\pm\alpha$ مثلثاتي نسبتونو د ټاکلو لپاره کافي ده د کمان پای مشخص کړو د مثلثاتي نسبت علامه و ټاکو او وروسته له $k\pi$ او $2k\pi$ څخه صرف نظر کوو.

په هغه مواردو کې چې د $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ زاويې لپاره مثلثاتي نسبتونه يعنې ساين پـه کوساين او تانجانت په کوتانجانت اوړي او بالعکس.

لاندې مثالونو ته پام وکړئ:

$\sin 170^\circ=\sin(180^\circ-10^\circ)=+\sin 10^\circ$ (ساين په دويمه ربع کې مثبت دی)

$\cos 170^\circ=\cos(180^\circ-10^\circ)=-\cos 10^\circ$ (کوساين په دويمه ربع کې منفي دی)

$\sin 85^\circ=\sin(90^\circ-5^\circ)=+\cos 5^\circ$ (ساين په لومړی ربع کې مثبت دی)

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ (ساين په څلورمه ربع کې منفي دی)

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\sin\alpha$ (کوساين په څلورمه ربع کې مثبت دی)

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=+\cot\alpha$ (تانژانت په دریمه ربع کې مثبت دی)

$\sin 750^\circ=\sin(4\pi+30^\circ)=\sin 30^\circ$ (ساين په لومړی ربع کې مثبت دی)

مثال) لاندې مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ:

135) $\tan\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$

136) $\cos\left(\frac{-55\pi}{4}\right)$

137) $\sin\left(\frac{89\pi}{6}\right)$

138) $\cos\left(\frac{51\pi}{4}\right)$

139) $\tan\left(\frac{67\pi}{6}\right)$

140) $\cot\left(\frac{14\pi}{3}\right)$

141) $\sin\left(\frac{55\pi}{3}\right)$

142) $\cot(1470^\circ)$

143) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

144) $\cos\left(-\frac{49\pi}{6}\right)$

145) $\sin(-15\pi)$

146) $\cot\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$

147) $\sin\left(997\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

148) $\cos\left(800\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وښیئ.

149) $2\cos\left(\frac{-125\pi}{4}\right)+3\tan\left(\frac{125\pi}{4}\right)+4\cot\left(\frac{-125\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-1$

150) $\log(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ)=0$

151) $\dfrac{\sin^3(\alpha-270^\circ)\cdot\cos(360^\circ-\alpha)}{\tan^3(\alpha-90^\circ)\cdot\cos^3(\alpha-270)}=\cos\alpha$

152) $\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdots\tan 88^\circ\cdot\tan 89^\circ=1$

153) $\sin 120^\circ\cdot\tan 135\cdot\cos 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

154) $\tan 225^\circ\cdot\cot 315^\circ\cdot\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

155) $\tan 225^\circ\times\sin 420^\circ+\cos 390^\circ=\sqrt{3}$

156) $\cot 40^\circ+3\tan 130^\circ-\tan 230^\circ-2\cot 140^\circ-4\tan 310^\circ-\tan 50^\circ=2\cot 40^\circ$

157) $\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin(2\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^2(\pi+\alpha)=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

158) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(x-\pi)\cdot\cos(x-2\pi)+\tan(-x)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=1$

159) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos 180^\circ$

160) $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}+\dfrac{\sin(\pi-x)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}\cdot\tan(90^\circ+x)=1-\dfrac{1}{\cos x}$

161) $\dfrac{\sin\dfrac{49\pi}{10}-\sin\dfrac{7\pi}{5}+\sin\dfrac{18\pi}{5}+3\cos\dfrac{3\pi}{5}}{\cos\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right)+2\cos\dfrac{13\pi}{5}-\sin\dfrac{19\pi}{10}}=1$

162) $\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-a\right)}+\dfrac{\sin(5\pi-a)}{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-a\right)}\cdot\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+a\right)=1-\dfrac{1}{\cos\alpha}\quad(k\in Z)$

مثال) که $C\,,B\,,A$ د مثلث زاويې وي، د لاندې مساواتو سموالی وښيئ.

163) $\sin A=\sin(B+C)$

164) $\cos(A+B)=-\cos C$

165) $\tan C=-\tan(A+B)$

166) $\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$

167) $\cos\dfrac{C}{2}=\sin\dfrac{A+B}{2}$

168) $\sin 2A=-\sin(2B+2C)$

169) $\tan\dfrac{3A}{2}=\cot\dfrac{3B+3C}{2}$

170) $\sin\left(\dfrac{A}{2}+B\right)=\sin\left(\dfrac{A}{2}+C\right)$

171) $\sin\left(B+\dfrac{A}{2}\right)=\cos\dfrac{C-B}{2}$

172 **مثال)** له $\tan^2 45^\circ-\cos^2 120^\circ=x\sin 135^\circ\cdot\cos 45^\circ\cdot\tan 240^\circ$ رابطې څخه د x مقدار محاسبه کړئ.

173 **مثال)** د $\tan 35^\circ=2a-1$ په فرضولو سره د $\dfrac{\sin 145^\circ-\sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ حاصل څومره دی؟

مثال) که چېرې $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$ وي، د $\dfrac{\cos 105^\circ-3\cos 195^\circ}{3\sin 435^\circ+2\sin 345^\circ}$ کسر حاصل محاسبه کړئ.

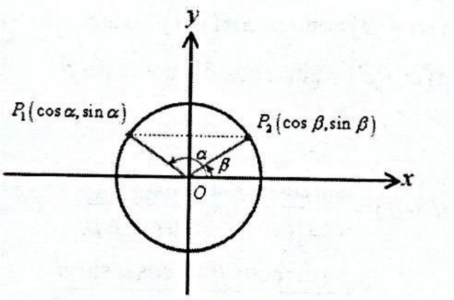
174 **مثال)** که چېرې $\tan\alpha=1$ وي او د α زاويې مخامخ کمان پای یې د مثلثاتي دايرې د محيط په څلورمه برخه کې پروت وي، د لاندې افادې حاصل محاسبه کړئ.

$$A=\cos(\alpha-\pi)+2\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cot\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{9\pi}{2}-\alpha\right)$$

7. $a \pm b$ مثلثاتي نسبتونه

7 – 1) اصلي فورمولونه

شکل ته په پام سره لاندې تحلیل درلودلای شو:



د α او β لاندې اضلاعوې، واحد دایره په $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ او $P_2(\cos\beta, \sin\beta)$ نقطو کې قطع کوي، په op_1p_2 مثلث کې د کوساین د قضیې په کارولو سره لرو چې:

$$\Delta op_1p_2 : \begin{cases} (p_1p_2)^2 = (op_1)^2 + (op_2)^2 - 2(op_1)(op_2)\cos(\alpha - \beta) \\ op_1 = op_2 = 1 \end{cases} \qquad (I)$$

$$p_1p_2 = \sqrt{(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2} \Rightarrow (p_1p_2)^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2$$
$$(\sin\beta - \sin\alpha)^2 \qquad (II)$$

$$(I),(II) : (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 = (1)^2 + (1)^2 - 2(1)(1)\cos(\alpha - \beta)$$
$$\Rightarrow \cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\beta\cdot\cos\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$
$$\Rightarrow (\cos^2\beta + \sin^2\beta) + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2(\cos\beta\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\sin\alpha)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$
$$\Rightarrow 1 + 1 - 2(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

د پاسنیو فورمولونوپه اساس، لاندې فورمولونه محاسبه کوو:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) + \sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (-\beta)\right]$$
$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-\beta)$$
$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta)\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

$$=> \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} => \tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=> \tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=> \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

په همدې توګه لرو چې:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} => \cot(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos a\sin\beta}$$

$$=> \cot(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$$

$$=> \cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

په همدې توګه لرو چې:

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

يادونه

د اصلي فورمولونو شرح په لاندې توګه ده:

$$\begin{cases}\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b\end{cases}\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b\\ \cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}\\ \tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}\end{cases}\qquad\begin{cases}\cot(a+b)=\dfrac{\cos a\cdot\cot b-1}{\cot b+\cot a}\\ \cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b+1}{\cot b-\cot a}\end{cases}$$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وښيئ.

176) $\dfrac{\sin 3x\cdot\cos 2x+\cos 3x\cdot\sin 2x}{\cos 3x\cdot\cos 2x-\sin 3x\cdot\sin 2x}=\tan 5x$

177) $\dfrac{\sin 7x\cdot\cos x-\cos 7x\cdot\sin x}{\cos 9x\cdot\cos 3x+\sin 9x\cdot\sin 3x}=\tan 6x$

178) $\sin(3\alpha-2\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)+\cos(3\alpha-2\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(4\alpha-\beta)$

179) $\sin(5\alpha+3\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)-\cos(5\alpha+3\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin 2(2\alpha+\beta)$

180) $\cos(7x-8y)\cdot\cos(3x+3y)-\sin(7x+8y)\cdot\sin(3x+3y)=\cos 5(2x-y)$

181) $\cos\dfrac{3x-y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-3y}{2}+\sin\dfrac{3x-y}{2}\sin\dfrac{x-3y}{2}=\cos(x+y)$

182) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)}=1$

183) $\dfrac{\tan\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)\cdot\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=-\cot x$

184) $\dfrac{\cot 3x\cdot\cot 2x-1}{\cot 2x+\cot 3x}=\dfrac{1}{\tan 5x}$

185) $\dfrac{\cot\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1}{\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cot\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)}=\cot 3x$

186) $2\cos(45+\alpha)\cos(45-\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

187) $\cos 2\alpha(1+\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha)=1$

188) $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$

189) $(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)+\sin 3\alpha=\cos\alpha$

190) $\dfrac{\tan(45^\circ-\alpha)}{\tan(45^\circ+\alpha)}=\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

191) $\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha\cdot\tan 3\alpha=\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha$

192) $\tan 17^\circ+\tan 43^\circ+\sqrt{3}\tan 17^\circ\tan 43^\circ=\sqrt{3}$

193) $\tan 80^\circ+\cot 35^\circ-\tan 80^\circ\tan 55^\circ=-1$

194) $\dfrac{\cos 3a+\sin a\sin 2a}{\sin 3a-\sin 2a\cos a}=\cot a \quad , \quad a\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$

195) $\dfrac{\cos 20^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}=2$

196) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

197) $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

198) $\cos 105^\circ = -\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

199) $\cos 175^\circ \cos 50^\circ - \sin 175^\circ \sin 50^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

200) $\dfrac{\cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b}{\sin(a+b)\cos b - \cos(a+b)\sin b} = \cot a$

201) $1 + \tan 2x \cdot \tan x = \sec 2x$

202) $(\cos\theta - \sin\theta)(\cos 2\theta - \sin 2\theta) + \sin 3\theta = \cos\theta$

203) $\dfrac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cos 22^\circ} = 1$

204) $3\sin 70^\circ + \sqrt{3}\cos 70^\circ = 2\sqrt{3}\cos 10^\circ$

205) $\dfrac{1+\tan 25^\circ}{1-\tan 25^\circ} = \tan 70^\circ$

206) $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

207) $\dfrac{1-\tan(17^\circ\ ,\ 20')\cdot\tan(27^\circ, 40')}{\tan(17^\circ, 20') + \tan(27^\circ, 40')} = 1$

208) $\sin(a+b+c) = \sin a\cos b\cos c + \sin b\cos a\cos c + \sin c\cos a\cos b$
$- \sin a\sin b\sin c$

209) $\cos(a-b-c) = \cos a\cos b\cos c + \sin a\sin b\cos c + \sin a\sin c\cos b$
$- \sin b\sin c\cos a$

210) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}\cdot\cot\dfrac{C}{2}$

211 **مثال** د $\tan(\alpha+\theta) = m\tan(\alpha-\theta)$ په فرضولو سره، ثبوت کړئ چې $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha} = \dfrac{m-1}{m+1}$ دی.

212 **مثال** د $\cos(\alpha-\beta) = p\sin(\alpha+\beta)$ په فرضولو سره، ثبوت کړئ چې $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \dfrac{p+1}{p-1}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$ دی.

213 **مثال** که $\cot a$ او $\cot b$ د $x^2 - 2x - 2 = 0$ دویم درجه معادلې جذرونه وي، $\tan(a+b)$ څومره دی؟

214 مثال) که $\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{4}$ وي، د $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ افادې حاصل ترلاسه کړئ.

215 مثال) که $\tan\left(2\alpha+\dfrac{\beta}{3}\right)=\sqrt{3}+1$ او $\tan\left(2\alpha-\dfrac{\beta}{3}\right)=\sqrt{3}-1$ وي، $\tan\dfrac{2\beta}{3}$ ترلاسه کړئ.

216 مثال) که په یوه مثلث کې $B=45^\circ$ وي ثبوت کړئ چې $(1+\cot A)(1+\cot C)=2$ دی.

217 مثال) په یوه مثلث کې $\sin A=2\sin(B-C)$ دی، ثبوت کړئ چې $\tan B=3\tan C$ کیږي.

2 – 7) فرعي فورمولونه

$$1)\ \cos a+\sin a=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

ثبوت

$$\cos a+\sin a=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos a+\sin a\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\right]=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$
$$\cos a+\sin a=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos a+\sin\frac{\pi}{4}\sin a\right)$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

ثبوت

$$2)\ \cos a-\sin a=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}a\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$$
$$\cos a-\sin a=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos a-\sin a\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$$

$$\cos a - \sin a = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin a\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos a - \sin\frac{\pi}{4}\sin a\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$$

3) $\sin a \cdot \cos a = \cos^2\left(a - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$

4) $\dfrac{1 - \tan a}{1 + \tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$

ثبوت

$$\frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan a}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan a}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$$

5) $\dfrac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$

ثبوت

$$\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan a}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan a}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$$

6) $\begin{cases} \sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a + b) \cdot \sin(a - b) \\ \cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) \end{cases}$

ثبوت

$$\cos(a + b)\cos(a - b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b)(\cos a \cdot \cos b + \sin a\sin b)$$

$$= \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b$$

$$= \cos^2 a(1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a)\sin^2 b$$

$$= \cos^2 a - \cos^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \cos^2 a \sin^2 b$$
$$= \cos^2 a - \sin^2 b$$

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$
$$= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b$$
$$= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\sin^2 a)\sin^2 b$$
$$= \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b$$
$$= \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$7)\ \begin{cases} \tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \dfrac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\tan(a-b)} \\ \tan 2b = \tan[(a+b)-(a-b)] = \dfrac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{1+\tan(a+b)\tan(a-b)} \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} \sin x + \tan\beta\cos x = \dfrac{1}{\cos\beta}[\sin(\beta+x)] \\ \cos x + \tan\beta \sin x = \dfrac{1}{\cos\beta}[\cos(\beta-x)] \end{cases}$$

یادونه-

په ډېرو مثلثاتي افادو کې، اکثر افادې چې سروکار ورسره لرو په $a\sin x + b\cos x$ توګـه دي، ددغـه ډول افادو د څېړلو لپاره لرو:

$$fi \quad a \neq 0 => a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right)$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ یو ثابت حقیقي عدد دی، نو کولی شو فرض کړو چې $\tan\beta = \frac{b}{a}$ دی، ځکـه تانجانـت هر حقیقي عدد ترلاسه کولی شو.

$$a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right) = a(\sin x + \tan\beta\cos x) = \frac{a}{\cos\beta}\sin(\beta + x)$$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وڅېړئ.

218) $\sin^2(45^\circ+\alpha) - \sin^2(45^\circ - \alpha) = \sin 2\alpha$

219) $\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha) = \tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)$

220) $\cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin x \cos x = \dfrac{1}{2}$

221) $\dfrac{1-\tan 20^\circ}{1+\tan 20^\circ} = \tan 25^\circ$

222) $\dfrac{1+\tan 25^\circ}{1-\tan 25^\circ} - \dfrac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ} = 2\cot 40^\circ$

223) $\sin 15° + \sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

224) $2\cos^2 10° - 2\cos^2 20° = \sin 10°$

225) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$

226) $\dfrac{1 + \tan 23°}{1 - \tan 23°} = \cot 22°$

227 **مثال)** که $\tan(a+b) = 5$ او $\tan(a-b) = 2$ وي $\tan 2a$ او $\tan 2b$ ترلاسه کړئ.

228 **مثال)** که $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ وي په دې صورت کې $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}$ ترلاسه کړئ.

229 **مثال)** که $\tan(a-b) = \dfrac{3}{7}$ او $\tan(a+b) = \dfrac{2}{5}$ وي د a قيمت څومره دی؟

230 **مثال)** د $\dfrac{\sin x + \cos x + \sqrt{2}}{\sin x - \cos x}$ حاصل مساوي دی په؟

231 **مثال)** که a او b صفر نه وي، په دې صورت کې $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(t + \beta)$ دی چې پکې $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$ کيږي.

8. $2a$ او $3a$ مثلثاتي نسبتونه

8 – 1) اصلي فورمولونه

1) $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$

ثبوت

$$\begin{aligned}
\sin 2a &= \sin(a+a) \\
&= \sin a \cdot \cos a + \cos a \cdot \sin a \\
&= 2\sin a \cdot \cos a
\end{aligned}$$

(پايله $\begin{cases} \sin a \cdot \cos a = \dfrac{1}{2}\sin 2a \\ \sin a = 2\sin\dfrac{a}{2} \cdot \cos\dfrac{a}{2} \end{cases}$

2) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= \cos(a+a) \\
&= \cos a \cdot \cos a - \sin a \sin a \\
&= \cos^2 a - \sin^2 a
\end{aligned}$$

ثبوت

$$\text{(پایله)}\begin{cases}\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow 2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2} \\ \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \Rightarrow 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \Rightarrow \sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \left(1-\sin^2 a\right) - \sin^2 a \\ &= 1 - 2\sin^2 a\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \left(1-\cos^2 a\right) \\ &= 2\cos^2 a - 1\end{aligned}$$

3) $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

ثبوت

$$\tan 2a = \tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1-\tan a \cdot \tan a} = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

4) $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

ثبوت

$$\cot 2a = \cot(a+a) = \frac{\cot a \cdot \cot a - 1}{\cot a + \cot a} = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

5) $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

ثبوت

$$\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a = \frac{\dfrac{2\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a}}{\dfrac{1}{\cos^2 a}} = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$$

6) $\cos 2a = \dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

ثبوت

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{\dfrac{\left(\cos^2 a - \sin^2 a\right)}{\cos^2 a}}{\dfrac{1}{\cos^2 a}} = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

7) $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

ثبوت

$$\sin 3a = \sin(2a+a)$$

$$= \sin 2a \cdot \cos a + \cos 2a \cdot \sin a$$
$$= (2\sin a \cdot \cos a) \cdot \cos a + (2\cos^2 a - 1)\sin a$$
$$= 2\sin a \cdot \cos^2 a + 2\cos^2 a \cdot \sin a - \sin a$$
$$= 2\sin a(1 - \sin^2 a) + 2(1 - \sin^2 a)\sin a - \sin a$$
$$= 2\sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a - 2\sin^3 a - \sin a$$
$$= 3\sin a - 4\sin^3 a$$

پايله) $\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}$

8) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

ثبوت

$$\cos 3a = \cos(2a + a)$$
$$= \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a$$
$$= (2\cos^2 a - 1)\cos a - (2\sin a \cdot \cos a)\sin a$$
$$= 2\cos^3 a - \cos a - 2\sin^2 a \cdot \cos a$$
$$= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1 - \cos^2 a)\cos a$$
$$= 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a$$
$$= 4\cos^3 a - 3\cos a$$

پايله) $a = \dfrac{\cos 3a + 3\cos a}{4}$

9) $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$

ثبوت

$$\tan 3a = \tan(2a + a)$$
$$= \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a \cdot \tan a}$$
$$= \frac{\dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} + \tan a}{1 - \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \cdot \tan a}$$
$$= \frac{2\tan a + \tan a - \tan^3 a}{1 - \tan^2 a - 2\tan^2 a}$$
$$= \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

10) $\cot 3a = \dfrac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^2 a - 1}$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وښيئ.

232) $1+\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

233) $1-\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

234) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

235) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

236) $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$

237) $\sin\alpha=\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

238) $\frac{2\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}=2\cos 2\alpha-1$

239) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\cot\alpha$

240) $3\sin\alpha-\sin 3\alpha=2\sin\alpha(1-\cos 2\alpha)$

241) $\frac{4\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2}=\sin 4\alpha$

242) $\cot\alpha\cot\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}\right)+\cot\left(\alpha\pm\frac{2\pi}{3}\right)=3\cot 3\alpha$

243) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$

244) $\tan\left(30+\frac{B}{2}\right)\cdot\tan\left(30-\frac{B}{2}\right)=\frac{2\cos B-1}{2\cos B+1}$

2 – 8) فرعي فورمولونه

1) $\tan a+\cot a=\frac{2}{\sin 2a}$

ثبوت

$$\cot a+\tan a=\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\cos a\cdot\sin a}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2a}=\frac{2}{\sin 2a}$$

2) $\cot a-\tan a=2\cot 2a$

ثبوت

$$\cot a-\tan a=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a\cdot\cos a}=\frac{\cos 2a}{\frac{1}{2}\sin 2a}=2\cot 2a$$

3) $\sin^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a$

ثبوت

$$\sin^4 a+\cos^4 a=1-2\sin^2 a\cdot\cos^2 a=1-2(\sin a\cdot\cos a)^2=1-2\left(\frac{1}{2}\sin 2a\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2$$

4) $\sin^6 a+\cos^6 a=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2a$

ثبوت

$$\sin^6 a+\cos^6 a=1-3\sin^2 a\cdot\cos^2 a=1-3(\sin a\cdot\cos a)^2=1-3\left(\frac{1}{2}\sin 2a\right)^2$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2a$$

5) $\cos^4 a-\sin^4 a=\cos 2a$

ثبوت

$$\cos^4 a-\sin^4 a=\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)\left(\cos^2 a+\sin^2 a\right)=\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)=\cos 2a$$

6) $\dfrac{\sin a}{1+\cos a}=\tan\dfrac{a}{2}$

ثبوت

$$\frac{\sin a}{1+\cos a}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\tan\frac{a}{2}$$

7) $\dfrac{\sin a}{1-\cos a}=\cot\dfrac{a}{2}$

ثبوت

$$\frac{\sin a}{1-\cos a}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2\sin^2\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\cot\frac{a}{2}$$

8) $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\quad,\quad\tan^2\dfrac{a}{2}=\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}$

ثبوت

$$\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}=\frac{2\sin^2 a}{2\cos^2 a}=\tan^2 a$$

$$9)\ \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\sin a}{1+\sin a} => \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\frac{1-\sin 2a}{1+\sin 2a}$$

ثبوت

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right]}{\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right]}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}=\frac{1-\sin a}{1+\sin a}$$

$$10)\ 4\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)=\sin 3a$$

ثبوت

(یادونه) $\sin(a-b)\cdot\sin(a+b)=\sin^2 a-\sin^2 b$

$$\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60+a)=\sin^2 60^\circ-\sin^2 a$$

$$=> \sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)=\left(\frac{3}{4}-\sin^2 a\right)$$

$$=> 4\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)=4\sin a\cdot\left(\frac{3}{4}-\sin^2 a\right)$$

$$=> 4\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)=3\sin a-4\sin 3a$$

$$=> 4\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)=\sin 3a$$

$$11)\ 4\cos\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\cos 3a$$

ثبوت

(یادونه) $\cos(a-b)\cdot\cos(a+b)=\cos^2 a-\sin^2 b$

$$\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\cos^2 60^\circ-\sin^2 a$$

$$=> \cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\sin^2 a$$

$$=> \cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\frac{1}{4}-\sin^2 a$$

$$=> 4\cos\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=4\cos a\cdot\left(\frac{1}{4}-\sin^2 a\right)$$

$$=> 4\cos\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\cos a-4\cos a\cdot\sin^2 a$$

$$=> 4\cos\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\cos a-4\cos a\cdot(1-\cos^2 a)$$

$$=> 4\cos\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\cos a-4\cos a+4\cos^3 a$$

$$=> 4\cos\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=4\cos^3 a-3\cos a$$

$$=> 4\cos\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)=\cos 3a$$

$$12)\ \tan a\cdot\tan(60^\circ-a)\cdot\tan(60^\circ+a)=\tan 3a$$

ثبوت

$$\tan a\cdot\tan(60^\circ-a)\cdot\tan(60^\circ+a)=\frac{\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)}{\cos a\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)}$$
$$=\frac{4\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)}{4\cos a\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)}$$
$$=\frac{\sin 3a}{\cos 3a}$$
$$=\tan 3a$$

13) $\cot a\cdot\cot(60^\circ-a)\cdot\cot(60^\circ+a)=\cot 3a$

ثبوت

$$\cot a\cdot\cot(60^\circ-a)\cdot\cot(60^\circ+a)=\frac{\cos a\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)}{\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)}$$
$$=\frac{4\cos a\cdot\cos(60^\circ-a)\cdot\cos(60^\circ+a)}{4\sin a\cdot\sin(60^\circ-a)\cdot\sin(60^\circ+a)}$$
$$=\frac{\cos 3a}{\sin 3a}$$
$$=\cot 3a$$

14) $\tan 3a=\tan a+\tan\left(a\pm\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(a\pm\frac{2\pi}{3}\right)$

ثبوت

$$\tan a+\tan\left(a+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(a+\frac{2\pi}{3}\right)=\tan a+\frac{\tan a+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan a\cdot\tan\frac{\pi}{3}}+\frac{\tan a+\tan\frac{2\pi}{3}}{1-\tan a\cdot\tan\frac{2\pi}{3}}$$
$$=\tan a+\frac{\tan a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan a}+\frac{\tan a-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan a}$$
$$=\frac{\tan a\left(1-3\tan^2 a\right)+\left(\tan a+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\tan a\right)+\left(\tan a-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\tan a\right)}{1-3\tan^2 a}$$
$$=\frac{9\tan a-3\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$$
$$=3\tan 3a$$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وڅیړئ.

245) $\dfrac{1-\tan^2(45-\alpha)}{1+\tan^2(45-\alpha)}=\sin 2\alpha$

246) $\dfrac{1-\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}+\dfrac{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

247) $\cos^4 a\cdot\dfrac{\sin 3a}{3}+\sin^3 a\cdot\dfrac{\cos 3a}{3}=\dfrac{\sin 4a}{4}$

248) $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$

249) $\cos^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\cos^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$

250) $\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$

251) $\dfrac{4\cos 2x}{\tan x+\cot x}=\sin 4x$

252) $\dfrac{4\tan\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}=\sin 4\alpha$

253) $\dfrac{1-\cot^2\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}{1+\cot^2\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}=\sin 2a$

254) $\cot a+\csc a=\cot\dfrac{a}{2}$

255) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=-\tan\dfrac{x}{2}\ ,\ \ \pi<x<2\pi$

256) $\dfrac{2(1+\sin x)}{1+\cos x}=\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)^2$

257) $2\cot x\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\tan 2x}\right)=2$

258) $\sin^4\dfrac{\pi}{8}-\cos^4\dfrac{\pi}{8}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

259) $\sin^6\dfrac{\pi}{8}+\cos^6\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{5}{8}$

260) $\tan^2 x+\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}=1$

261) $\dfrac{3\cot 75^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

262) $\tan 20^\circ+2\cot 40^\circ-\cot 20^\circ=0$

263) $\cot a-\tan a-2\tan 2a-4\tan 4a=8\cot 8a$

264) $\dfrac{1+\cos^2 x-2\cos x}{1+\cos^2 x+2\cos x}=\tan^4\dfrac{x}{2}$

265) $\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=\tan x$

266) $\dfrac{1}{\cos 32^\circ}+\dfrac{1}{\tan 58^\circ}=\cot 29^\circ$

267) $\cos 15^\circ\cos 25^\circ\cos 25^\circ\cos 85^\circ=\dfrac{1}{16}$

268) $\cos 10° \cos 20° \cos 40° = \frac{1}{8}\cot 10$

269) $\sin 75° \cdot \sin 135° \sin 165° = \frac{\sqrt{2}}{8}$ 270) $\frac{1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$

271) $\frac{\cos\alpha + \cos 2\alpha + 1}{\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \cot\alpha$ 272) $\sin 18 \cdot \cos 36 = \frac{1}{4}$

273) $\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} = \frac{1}{16}\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{6}}$

274) $\sin 10 \cos 40 \cos 50 = \frac{1}{4}\sin 20$ 275) $\frac{\sin\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}}{3\sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12}} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

277) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \sin 2t$

278) $\tan\left(30+\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tan\left(30-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\cos\theta - 1}{2\cos\theta + 1}$

279) $\frac{3+4\cos 4\alpha + \cos 8a}{3-4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \cot^4 2\alpha$

280) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x}}} = \cos\frac{x}{4}$; $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

281) $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ 282) $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

283) $\tan\frac{\pi}{8} - \cot\frac{\pi}{8} = -2$ 284) $\frac{\csc 4\theta + \cot 4\theta}{\cot\theta - \tan\theta} = \frac{1}{2}$

285) $\tan x + \cot 2x = \frac{1}{\sin 2x}$ 286) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\tan x} = \cot\frac{x}{2}$

287) $\frac{\tan^2 25 - \tan^2 20}{1-\tan^2 25 \tan^2 20} = \tan 5$

288) $64 \sin 10 \sin 20 \sin 30 \sin 40 \cdots \sin 90 = \frac{3}{4}$

289) $\frac{2\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha - 1$

290) $\sin 3\alpha \cdot \sin^3\alpha + \cos 3a \cdot \cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha$

291) $\dfrac{\sin a - \cos a \cdot \tan \frac{a}{2}}{\cos a + \sin a \cdot \tan \frac{a}{2}} = \tan \dfrac{a}{2}$

292) $\tan 5x - \tan 3x - \tan 2x = \tan 5x \tan 3x \tan 2x$

293) $\cot \dfrac{x}{2} - \tan \dfrac{x}{2} - 2\tan x - 4\tan 2x = 8\cot 4x$

294) $\sin^4 \dfrac{\pi}{4} + \cos^4 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{3}{4}$

295) $\dfrac{\sin 12^\circ}{1+\cos 12^\circ} = \tan 60^\circ$

296) $\sin^6 15^\circ + \sin^6 75^\circ = \dfrac{3}{16}$

297) $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} - \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = 2\cot 2x$

298 **مثال)** که $\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \dfrac{1}{4}$ وي $\sin 4x$ ترلاسه کړئ.

299 **مثال)** که $\tan x + \cot x = 4$ وي $\sin 2x$ څومره دی؟

300 **مثال)** که $\tan(45^\circ - x) + \tan(45^\circ + x) = a$ وي $\cos 2x$ ترلاسه کړئ.

301 **مثال)** که $\sin x = \dfrac{2}{3}$ وي، $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ ترلاسه کړئ.

302 **مثال)** کــه $\sin x = -\dfrac{3}{7}$ او د x کــمان پــای پــه درېيمــه ناحيــه کــې وي، د $\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right)$ او $(2x - 3x)$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

303 **مثال)** که $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ وي، د $\cos 4x$ قيمت محاسبه کړئ.

مثال) د لاندې هرې يوې افادې max او min قيمت ترلاسه کړئ.

304) $A = \sin^4 x + \cos^4 x$

305) $B = \sin^6 x + \cos^6 x$

306 **مثال)** له $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ رابطې څخه د 18° او 36° مثلثاتي نسبتونه ترلاسه کړئ.

307 **مثــــال)** ثبـــوت کـــړئ کـــه $\sin^2 \alpha = \sin \beta + \sin^2 \gamma$ وي پـــه دې صـــورت کـــې $1 + \cos 2\alpha = \cos 2\beta + \cos 2\gamma$ دی.

308 **مثــــال)** ثبـــوت کـــړئ کـــه $\sin 2\beta = \sin \alpha \cos \alpha$ وي پـــه دې صـــورت کـــې $\cos 2\beta = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$ دی.

309 **مثال)** ثبوت کړئ که $\tan x = \dfrac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}$ وي، لرو چې $y = \sin 2x$ دی. $(y \neq 0\ ,\ -1 < y < 1)$

310 **مثال)** که $\tan x \cdot \tan(x+y) = 3$ سم وي، $2\cos(2x+y) + \cos y = 0$ مساوات ثبوت کړئ. $\left(x\,, x+y \neq \dfrac{k\pi}{2}\right)$

311 **مثال)** که $\sin x = \lambda \sin(\alpha - x)$ ولرو د $\cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\cot\left(x-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ مساواتو سموالی ثبوت کړئ.

312 **مثال)** که $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$ وي $\sin 2x$ ترلاسه کړئ.

313 **مثال)** که $x - y = \dfrac{\pi}{2}$ او $\tan x - \tan y = 2$ وي، د $\sin 2x$ قیمت ترلاسه کړئ.

314 **مثال)** که $\sin 2\alpha = \dfrac{7}{8}$ وي $\tan\alpha + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ترلاسه کړئ.

315 **مثال)** که $\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 4\cos 2x$ وي $\sin 4x$ څومره دی.

316 **مثال)** که $\sin 2\alpha = \dfrac{1}{4}$ وي $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$ ترلاسه کړئ.

317 **مثال)** که $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ او $\tan x = 2$ وي $\tan\dfrac{x}{2}$ ترلاسه کړئ.

318 **مثال)** که $5(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10}$ وي، د $\tan x$ قیمت ترلاسه کړئ.

319 **مثال)** که $f\left(\tan\dfrac{x}{2}\right) = \cos x$ وي، په دې صورت کې $f(2)$ ترلاسه کړئ.

320 **مثال)** که $\log\sin\dfrac{x}{2} = a$ وي د $\log(3 - 4\cos x + \cos 2x)$ حاصل ترلاسه کړئ.

321 **مثال)** که $2\cos x = a + \dfrac{1}{a}$ وي $2\cos 3x$ ترلاسه کړئ.

322 **مثال)** که $\cos x = \dfrac{3}{4}$ وي، $\tan\dfrac{x}{2}$ محاسبه کړئ.

323 **مثال)** که په لاندې مثلث کې ABC ، $\angle A = 120°$ وي، د مثلث د دوو نورو زاویو لپاره ثبوت کړئ چې $\tan 3B + \tan 3C = 0$ دی.

9. د لوګارتم په مرسته، افادې د محاسبې وړ ګرځول

9 – 1) په ضرب حاصل د مجموع او تفاضل اړول

د لوګارتم په مرسته د افادو دمحاسبې وړ کولو څخه موخه دا ده چې افادې په ضرب حاصل یا هغه افادو واړوو ترڅو وکولی شو لوګارتم ترې ونیسو.

$$1)\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$2)\ \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$$

$$3)\ \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$4)\ \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

$$5)\ \tan p - \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cdot\cos q} \qquad 6)\ \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$7)\ \cot p + \cot q = \frac{\sin(q+p)}{\sin p\cdot\sin q} \quad 8)\ \cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p\cdot\sin q}$$

د پاسنیو فورمولونو په کارولو سره کولی شو مجموع یا تفاضل، د ضرب په حاصل واړوو.

اوس د بیان شوو فورمولونو په ثبوت پیلوو:

$$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b \qquad (I)$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b \qquad (II)$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b \qquad (III)$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b \qquad (IIII)$$

$$if\ \left\{\begin{matrix} a+b=p \\ a-b=q\end{matrix}\right\rangle \quad \left\{\begin{matrix} a=\dfrac{p+q}{2} \\ b=\dfrac{p-q}{2}\end{matrix}\right\rangle \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(I)+(II) \Rightarrow \sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cdot\cos b$$
$$(I)-(II) \Rightarrow \sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\cdot\sin b$$

$$\Rightarrow \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$$

$$(III)+(IIII) \Rightarrow \cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cdot\cos b$$

$$\Rightarrow \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(III)-(IIII) \Rightarrow \cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\cdot\sin b$$

$$\Rightarrow \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cdot\cos q+\sin q\cdot\cos p}{\cos p\cdot\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cdot\cos q-\sin q\cdot\cos p}{\cos p\cdot\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$\cot p+\cot q=\frac{\cos p}{\sin p}+\frac{\cos q}{\sin q}=\frac{\cos p\cdot\sin q+\cos q\cdot\sin p}{\sin p\cdot\sin q}=\frac{\sin(q+p)}{\sin p\cdot\sin q}$$

$$\cot p-\cot q=\frac{\cos p}{\sin p}-\frac{\cos q}{\sin q}=\frac{\cos p\cdot\sin q-\cos q\cdot\sin p}{\sin p\cdot\sin q}=\frac{\sin(q-p)}{\sin p\cdot\sin q}$$

مثال) لاندې افادې په حاصلضرب واړوئ (د لوګارتم په مرسته د محاسبې وړ ګرځول).

324) $A=\sin 7x+\sin 3x$ 325) $A=\sin 4\alpha+\sin 4\beta$

326) $A=\sin(2x+y)+\sin(x+2y)$ 327) $A=\sin 5x-\sin x$

328) $A=\sin(3x+y)-\sin(x+3y)$ 329) $A=\sin\frac{3\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}$

330) $A=\cos 10x+\cos 4x$ 331) $A=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

332) $A=\cos 5\alpha+\cos 5\beta$ 333) $A=\cos 12x-\cos 6x$

334) $A=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 335) $A=\cos 6\alpha-\cos 6\beta$

336) $A=\tan 7x+\tan x$ 337) $A=\tan 6x-\tan 2x$

338) $A=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 339) $A=\cot 3x+\cot x$

340) $A=\cot 7x-\cot 8x$

341) $B=\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}$

342) $A=\sin x+\cos x$ 343) $B=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-1$

344) $D=1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)$

345) $A=\cot^2 x-3$

346) $A=2-\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha-\sin^2 3\alpha-\sin^2 4\alpha$

347) $A=\sin 13x+3\sin 11x+3\sin 9x+\sin 7x$

348) $A=\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 9\alpha-\sin 5\alpha$

349) $A=\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha-\frac{3}{2}$

350) $A=\cos x+2\cos 2x+\cos 3x$ 351) $A=\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

352) $A=\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha$ 353) $A=1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$

354) $A=\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cot\alpha-\cot\dfrac{\alpha}{2}}$ 355) $A=\sin^2 70-\cos^2 50$

356) $A=\tan^2 3x-\tan^2 2y$ 357) $A=\sin 2\alpha\tan\alpha+\cos 2\alpha$

358) $A=2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$

359) $A=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

360) $A=\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha+\cos^2 4\alpha-2$

361) $A=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$

362) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$

363) $A=\dfrac{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}$

364) $A=\dfrac{\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$

365) $A=\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$

366) $A=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$

367) $A=\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)$

368) $A=1+2\sin\alpha-\cos 2\alpha$ 369) $A=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2}$

370) $A=\dfrac{2\sin 2x-1}{2\sin 2x+\sqrt{3}}$ 371) $A=\dfrac{\cot^2\theta+9\tan^2\theta-6}{\cot^2\theta+\tan^2\theta+2}$

372) $A=\dfrac{1-\sin y+\cos y}{1+\sin y+\cos y}$

373) $A=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3-\sin^3 x-\sin^3 2x-\sin^3 3x$

مثال) د هر یوه لاندیني مساوات سموالی وښيئ.

374) $\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a\cdot\sin b}+\dfrac{\sin(b-c)}{\sin b\cdot\sin c}+\dfrac{\sin(c-a)}{\sin c\cdot\sin a}$

375) $\sin 10+\sin 50-\sin 70=0$ 376) $\cos 20+\cos 100+\cos 140=0$

377) $\cos 47-\cos 61-\cos 11+\cos 25=\sin 7$

378) $\sin 87-\sin 59-\sin 93+\sin 61=\sin 1$

379) $\tan 30+\tan 40+\tan 50+\tan 60=\dfrac{8\cos 20}{\sqrt{3}}$

380) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$

381) $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

382) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

383) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin(\alpha-\beta)$

384) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin 2x$

385) $\sin 75-\sqrt{3}\cos 75-1=-4\sin(7.5)\cos(22.5)$

386) $\cos 80+\cos 40-\cos 20=0$

387) $\tan(11°,15')+\tan(33°,45')=\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos(11°,15')\cos(33°,45')}$

388) $\cos 36+\sin 36=\sqrt{2}\cos 9$ 389) $\tan 55+\tan 35+2=\dfrac{4\sin^2 80}{\sin 70}$

390) $\cot\dfrac{x}{2}-\cot x=\dfrac{1}{\sin x}$

391) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin 2x}+\cdots+\dfrac{1}{\sin 2^n x}=\dfrac{\sin\left(2^n-\dfrac{1}{2}\right)x}{\sin 2^n x\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$

392) $1+\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha=\sin(\alpha+\beta)(\sin(\alpha-\beta))$

393) $\tan 81-\tan 27-\tan 63+\tan 9=4$

394) $\dfrac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$

395) $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$

396) $1+\sqrt{3}\cos a+\cos 2a=4\cos a\cdot\cos\dfrac{a+30°}{2}\cdot\cos\dfrac{a-30°}{2}$

397) $\sin 2x(1+\tan x\cdot\tan 2x)=\tan 2x$

398) $\dfrac{\tan 3x+\tan x}{\tan 3x-\tan x}=2\cos 2x$

399) $\cos 10-\cos 130+\cos 110=2\sin 40$

400) $2\cos 32 - \tan\dfrac{\pi}{3} = -4\sin 31\sin 179$

401) $\cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) - \cos 2x\cos 2y = 1$

402) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin(\alpha + 3\pi) + \sin\left(\alpha + \dfrac{5\pi}{3}\right) = 0$

403) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 4x - \dfrac{3}{2} = -2\cos 2x \cdot \cos(30+3x)\cos(30-3x)$

404) $\dfrac{\sin a + \sin 3a}{\sin 4a} - \dfrac{\sin a}{\sin 2a} = \dfrac{2\sin a}{\sin 4a}$

405 **مثال)** که $f(x) = \sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x$ وي، په دې صورت کې $\dfrac{f(x)}{\cos x}$ ترلاسه کړئ.

406 **مثال)** که x او y په $(0,\pi)$ واټن کې دوه نامساوي کمانونه او $\sin x - \sin y = \sin\dfrac{x-y}{2}$ وي، د $x+y$ اندازه ترلاسه کړئ.

407 **مثال)** که $\log_2(\sin 10°) = a$ وي، د $\log_2 \dfrac{\sin 20° + \sin 40°}{\sin 20°}$ قیمت ترلاسه کړئ.

408 **مثال)** که $a + b = 60^0$ وي، د $\dfrac{\cos^2 a - \sin^2 b}{\cos(a-b)}$ حاصل ترلاسه کړئ.

409 **مثال)** که د یوه عددي تصاعد درې a,b,c متوالي جملې d نسبت ولري $\cos a + \cos c$ ترلاسه کړئ.

2 – 9) د لوګارتم په مرسته د ټاکلې زاویې په کارولو سره، افادې د محاسبې وړ ګرځول

د ټاکلې زاویې په کارولو سره د لوګارتم په مرسته، چې کله افادې د محاسبې وړ ګرځوو نو لاندې ټکو ته باید پام وکړ:

1) که په مسئله کې شرط بیان شوی وي، $\dfrac{b}{a}$ یا $\dfrac{a}{b}$ کولی شو پخپله خوښه $\sin\alpha$ یا $\cos\alpha$ وټاکو.

په هغه مسئله کې چې شرط راکړل شوی وي، معمولا له ستر پارامتر څخه فکتور نیسو، مثلاً په هغه مثال کې چې $b > a > 0$ دی له b څخه فکتور نیسو.

2) که په مسئله کې شرط نه وي بیان شوی، $\dfrac{b}{a}$ او $\dfrac{a}{b}$ کولی شو په خپله خوښه $\tan\alpha$ یا $\cot\alpha$ وټاکو.

یادونه

پام مو وي چې د ځوابونو ظاهري شکل د دوو بیلابیلو لارو له مخې متفاوت دي او دا کومه ځانګړې ستونزه نه ده. په دې برخه کې مهمه مسئله دا ده چې د لوګارتم په مرسته یو افاده د محاسبې وړتیا ترلاسه کړي.

مثال) لاندې افادې د لوګارتم په ذریعه د محاسبې وړ کړئ.

410) $A = a + b \quad , \quad a > b > 0$ 411) $A = a - b \quad , \quad a > b > 0$

412) $A = \dfrac{a-b}{a+b} + 1 \ , \ a > b > 0$ 413) $A = 2\sqrt{a^2 - b^2} + a \ , a > b > 0$

414) $A = \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}, a > b > 0$ 415) $A = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} + 1, \ a > b > 0$

416) $A = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} + \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} \ , \ (a > b > 0)$

417) $A = p^2 - q^2 \sin^2 x \quad , \quad q > p > 0$

418) $A = \sqrt{4\tan\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{4\tan\alpha - \sin\alpha} \quad ; \left(\alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

419) $A = \dfrac{4\sin 2x - 3}{4\sin 2 + 3}$

420) $A = \dfrac{2 + 3\cos 20}{2 - 3\cos 20}$

421 **مثال)** د $b > 1$ په فرضولو سره د $a^2x^2 = 2abx + 1 = 0$ دویمه درجه معادلې جذرونه د لوګارتم په مرسته د محاسبې وړ کړئ.

مثال) لاندې افادې د لوګارتم په ذريعه د محاسبې وړ وګرځوئ.

422) $A = a + b$ 423) $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

424) $A = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ 425) $A = \sqrt{a^2 + b^2} + b \ ; \ a > 0$

426) $A = \dfrac{a^2 - b^2}{ab}$ 427) $A = a\sin x \pm b\cos x$

428) $\tan 3x \dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \ ; a,b > 0$ 429) $A = a^2 \tan x - b^2 \cot x$

430) $A = \dfrac{3 + \tan x}{2 - \tan x}$ 431) $C = 5 - 3\tan x$

432) $A = a\sin 2x - (a-2)\cos 2x$ 433) $x = \dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

434) $\sin x = \dfrac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$

435) $A = b\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right)$

436 **مثال)** د $x^2 - 2bx - a^2 = 0$ دویم درجه معادلې جذرونه د لوګارتم په مرسته د محاسبې وړ کړئ.

437 **مثـال)** پـه $2\sin x - 3\cos\alpha \cdot \sin x - 2\sin\alpha \cdot \cos x = 0$ معادلـه کـې فرضـوو چـې $\tan\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha$ وي، د $\tan x$ قیمت د لوګارتم په مرسته د محاسبې وړ کړئ.

438 **مثـال)** $A = (1-q)\cos x + 2\sqrt{q}\sin x + (1+q)$ افـاده د $q = \tan^2\frac{\alpha}{2}$ پـه فرضـولو سره د لوګارتم په مرسته د محاسبې وړ کړئ.

439 **مثال)** $A = p^2\sin^2\alpha - q^2\cos^2\alpha$ افاده د ټاکلې زاویې په کارولو سره، د لوګارتم په ذریعه د محاسبې وړ کړئ.

10. په مجموع یا تفاضل د دوو مثلثاتي نسبتونو د حاصلضرب اړول

1) $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

2) $\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

3) $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

4) $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

اوس د فورمولونو په ثبوت پیل کوو:

$$\sin(a+b) = \sin\cdot\cos b + \cos a \cdot \sin b \qquad (1)$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \qquad (II)$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \qquad (III)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \qquad (IIII)$$
$$(I) + (II) \Rightarrow \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cdot \cos b$$
$$\Rightarrow \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$
$$(I) - (II) \Rightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \cdot \sin b$$
$$\Rightarrow \cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$
$$(III) + (IIII) \Rightarrow \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b$$
$$\Rightarrow \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$(III) - (IIII) \Rightarrow \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \cdot \sin b$$
$$\Rightarrow \sin a \cdot \sin b = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\Rightarrow \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

مثال) لاندې افادې د دوو مثلثاتي توابعو په مجموع یا تفاضل واړوئ.

440) $A = \sin 5x \cdot \sin 7x$

441) $A = \sin 105° \cos 75°$

442) $A = \sin(11°, 37') \cdot \cos(78°, 53)$

443) $A = \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{3a}{2}$

444) $A = \cos(18°, 27')\cos(17°, 3')$

445) $A = \sin\frac{a}{3} \cdot \sin\frac{2a}{3}$

446) $A = \cos(a-b) \cdot \cos(a+b)$

447) $A = \sin\left(a - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$

448) $A = \sin\frac{a}{2} \cdot \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

449) $A = \sin(a+b-c)\sin(a+b+c)$

450 $A = 2\sin 3x \sin x + \cos 4x$

451) $A = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وڅیړئ.

452) $2\sin(45+\alpha)\sin(45-a) = \cos 2a$

453) $\dfrac{2\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha - 1$

454) $\sin\alpha \cdot \sin(\alpha+2\beta) - \sin\beta \cdot \sin(2\alpha+\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

456) $\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(3\alpha-3\beta) = \sin^2(2\alpha-\beta) - \sin^2(2\beta-\alpha)$

457) $\cos\alpha \cdot \cos(\alpha+2\beta) - \cos\beta \cdot \cos(2\alpha+\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

458) $\dfrac{\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin 3\alpha\sin 6\alpha + \sin 4\alpha\sin 13\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 3\alpha\cos 6\alpha + \sin 4\alpha\cos 13\alpha} = \tan 9\alpha$

459) $\sin(3\alpha+\beta)\sin(3\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin 4\alpha \sin 2\alpha$

460) $\sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{4}$

461) $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{7} \cdot \sin\frac{3\pi}{7} \cdot \sin\frac{5\pi}{7}$

462) $\dfrac{\sin 7x}{\sin x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x = 1$

463) $\dfrac{1}{2\sin a}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] = \cos b$

464) $A = \tan(a+b+c) - \tan\alpha - \tan b - \tan c$

465) $4\sin 20° \sin 80° - 2\sin 10° = 1$

466) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$

467) $\dfrac{1-4\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\sin 10^\circ}=2$

468) $\dfrac{2\sin a\cdot\cos 3a}{\sin 2a}=2\cos 2a-1$

469) $4\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}=\sin A+\sin B+\sin C$

یادونه: د ساین او کوساین له جنسه د یوې افادې د جمع حاصل د ټاکلو لپاره، افاده په $2\sin\dfrac{d}{2}$ کې ضربوو او په هغه یې بېرته تقسیموو (داسې چې کمانونه هغه عددي تصاعد جوړ کړي چې نسبت یې d وي). پام مو وي چې د ساین او کوساین توان لومړی درجه دی.

مثال) د لاندې افادو حاصل وټاکئ.

470) $A=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx$

471) $A=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x$

472) $A=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cdots+\cos^2 nx$

473) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$

474) $\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{6\pi}{7}=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{14}$

475) $\sin\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{14}$

476) $\cos\dfrac{\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}+\cos\dfrac{5\pi}{13}+\cos\dfrac{7\pi}{13}+\cos\dfrac{9\pi}{13}+\cos\dfrac{11\pi}{13}=\dfrac{1}{2}$

477) $\cos\dfrac{\pi}{15}+\cos\dfrac{3\pi}{15}+\cos\dfrac{5\pi}{15}+\cos\dfrac{7\pi}{15}+\cos\dfrac{9\pi}{15}+\cos\dfrac{11\pi}{15}+\cos\dfrac{13\pi}{15}=\dfrac{1}{2}$

478 **مثال)** له A نقطې څخه په $OA=a$ اندازه له مرکز څخه یو قاطع رسموو، ترڅو په b او C نقطو کې دایره قطع کړي، ثبوت کړئ:

$$\tan\frac{A\widehat{O}B}{2}\cdot\tan\frac{A\widehat{O}C}{2}=\frac{a-R}{a+R}$$

11. د Arc مفهوم

تعریف $(11-1)$

$$1)\ Arc\sin m = \alpha <=> \sin\alpha = m \ ; \quad -1 \le m \le 1 \,,\ -\frac{\pi}{2} \le Arc\sin m \le \frac{\pi}{2}$$

$$2)\ Arc\cos m = \alpha <=> \cos\alpha = m \ ; \quad -1 \le m \le 1 \,,\ 0 \le Arc\cos m \le \pi$$

$$3)\ Arc\tan m = \alpha <=> \tan\alpha = m \ ; \quad m \in \mathbb{R} \,,\ -\frac{\pi}{2} < Arc\tan m < \frac{\pi}{2}$$

$$4)\ Arc\cot m = \alpha <=> \cot\alpha = m \ ; \quad m \in \mathbb{R} \,,\ 0 < Arc\cot m < \pi$$

مثال) د لاندې افادو حاصل ترلاسه کړئ.

$$479)\ Arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 480)\ Arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 481)\ Arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

د Arc اړوند مطابقتونه $(11-2)$

لومړی ډله (x یو حقیقي عدد دی)

$$1)\ Arc\sin(-x) = -Arc\sin x$$
$$2)\ Arc\cos(-x) = \pi - Arc\cos x$$
$$3)\ Arc\tan(-x) = -Arc\tan x$$
$$4)\ Arc\cot(-x) = \pi - Arc\cot x$$

دویمه ډله (x یو حقیقي عدد دی)

$$1)\ \sin(Arc\sin x) = x \ ; \quad -1 \le x \le 1$$
$$2)\ \cos(Arc\cos x) = x \ ; \quad -1 \le x \le 1$$
$$3)\ \tan(Arc\tan x) = x \ ; \quad \forall x \in R$$
$$4)\ \cot(Arc\cot x) = x \ ; \quad \forall x \in R$$
$$5)\ \sec(Arc\sec x) = x \ ; \quad |x| \ge 1$$

درېیمه ډله (x یو کمان دی)

$$1)\ Arc\sin(\sin x) = x \ ; \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \quad if\ \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2} \ => y = \pi - x$$

$$2)\ Arc\cot(\cos x) = x \ ; \quad 0 \le x \le \pi \ , \quad if\ \pi \le x \le 2\pi \ => y = 2\pi - x$$

$$3)\ Arc\tan(\tan x) = x \ ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \ , \quad if\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \ => y = x - \pi$$

$$4)\ Arc\cot(\cot x) = x \ ; \quad 0 < x < \pi \ , \quad if\ \pi < x < 2\pi \ => y = x - \pi$$

5) $Arc\sec(\sec x) = x \;;\qquad x \in [0,\pi] x \neq \frac{\pi}{2}$

څلورمه ډله

$$1)\begin{cases}\sin(Arc\cos x) = \sqrt{1-x^2} \\ \sin(Arc\tan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ \sin(Arc\cot x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}\cos(Arc\sin x) = \sqrt{1-x^2} \\ \cos(Arc\tan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ \cos(Arc\cot x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}\tan(Arc\sin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \tan(Arc\cos x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ \tan(Arc\cot x) = \dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}\cot(Arc\sin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \cot(Arc\cos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ \cot(Arc\tan x) = \dfrac{1}{x}\end{cases}$$

ثبوت

د $\tan(Arc\sin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ په ثبوت پیل کوو:

$$\begin{cases}Arc\sin x = \alpha \Rightarrow x = \sin\alpha \\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

$$\tan(Arc\sin x)=\frac{\sin(Arc\sin x)}{\cos(Arc\sin x)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

د $\tan(Arc\cos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ثبوت پیلوو:

$$\begin{cases} Arc\cos x=\alpha \Rightarrow x=\cos\alpha \\ \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\tan(Arc\cos x)=\frac{\sin(Arc\cos x)}{\cos(Arc\cos x)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

پنځمه ډله

1) $Arc\sin x+Arc\cos x=\frac{\pi}{2}\quad ;\qquad -1\le x\le 1$

2) $Arc\tan x+Arc\cot x=\frac{\pi}{2}\ ;\qquad x\in R$

3) $Arc\sin x+Arc\sin y=Arc\cos\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy\right)\quad ;$
$0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1$

4) $Arc\sin x-Arc\sin y=Arc\sin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)\quad ;$
$0\le x\ ,\ \ y\le 1$

5) $Arc\sin x=Arc\cos\sqrt{1-x^2}$

6) $Arc\tan x+Arc\tan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\quad ;\qquad x>0$

7) $Arc\tan x+Arc\tan y=Arc\cot\frac{1-xy}{x+y}$

8) $Arc\tan x-Arc\tan y=Arc\tan\frac{x-y}{1+xy}$

ثبوت

د $Arc\sin x+Arc\cos x=\frac{\pi}{2}$ په ثبوت پیلوو:

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$if\ \ f(x)=\sin x\xrightarrow{\text{معکوس منونکی } f}x=Arc\sin f(x)\Rightarrow f^{-1}(x)=Arc\sin x$$

$$if\ \ g(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\xrightarrow{\text{معکوس منونکی } g}\frac{\pi}{2}-x=Arc\cos g(x)$$

$$=>\frac{\pi}{2}-g^{-1}(x)=Arc\cos x=>g^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-Arc\cos x$$

$$if\ \ f(x)=g(x)=>\ f^{-1}(x)=g^{-1}(x)$$

$$=>\ Arc\sin x=\frac{\pi}{2}-Arc\cos x$$

$$=>\ Arc\sin x+Arc\cos x=\frac{\pi}{2}$$

د $Arc\tan x+Arc\tan y=Arc\cot\dfrac{1-xy}{x+y}$ په ثبوت پيل کوو:

$$\left.\begin{cases} if\ \ \ x>0=>0<Arc\tan x<\dfrac{\pi}{2} \\ if\ \ \ y>0=>0<Arc\tan y<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\right\rangle\ 0<Arc\tan x+Arc\tan y<\pi$$

$$\exists z\in R\ \ni\ Arc\tan x+Arc\tan y=Arc\cot z$$

$$Arc\tan x+Arc\tan y=Arc\cot z$$

$$=>\tan(Arc\tan x+Arc\tan y)=\tan(Arc\cot z)$$

$$=>\frac{\tan(Arc\tan x)+\tan(Arc\tan y)}{1-\tan(Arc\tan x)\cdot\tan(Arc\tan y)}=\frac{1}{\cot(Arc\cot z)}$$

$$=>\frac{x+y}{1-xy}=\frac{1}{z}$$

$$=>z(x+y)=1-xy$$

$$=>z=\frac{1-xy}{x+y}$$

$$Arc\tan x+Arc\tan y=Arc\cot z=>Arc\tan x+Arc\tan y=Arc\cot\frac{1-xy}{x+y}$$

د $Arc\tan x-Arc\tan y=Arc\tan\dfrac{x-y}{1+xy}$ په ثبوت پيل کوو:

$$\left.\begin{cases} if\ \ \ x>0=>0<Arc\tan x<\dfrac{\pi}{2} \\ if\ \ \ y>0=>0<Arc\tan y<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\right\rangle\ 0<Arc\tan x-Arc\tan<\pi$$

$$\exists z\in R\ \ni\ Arc\tan x-Arc\tan y=Arc\tan z$$

$$Arc\tan x - Arc\tan y = Arc\tan z$$
$$\Rightarrow \tan(Arc\tan x - \tan y) = \tan(Arc\tan z)$$
$$\Rightarrow \frac{\tan(Arc\tan x) - \tan(Arc\tan y)}{1+\tan(Arc\tan x)\cdot\tan(Arc\tan y)} = \tan(Arc\tan z)$$
$$\Rightarrow \frac{x-y}{1+xy} = z$$
$$Arc\tan x - Arc\tan y = Arc\tan z \Rightarrow Arc\tan x - Arc\tan y = Arc\tan\frac{x-y}{1+xy}$$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وښيئ.

$$482)\ \sin\left[2Arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2} - 3Arc\tan(-1) + Arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2Arc\tan\left(-\sqrt{3}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$483)\ Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \qquad 484)\ Arc\tan 2 + Arc\tan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

$$485)\ 3Arc\tan\frac{1}{2} + 2Arc\tan\frac{1}{3} = Arc\tan(-2) + \pi$$

$$486)\ \sin\left[Arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + Arc\cot\left(\sqrt{3}-2\right)\right] = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$487)\ Arc\cot x + Arc\cot(-x) = \pi \qquad 488)\ \cos\left[2Arc\sin\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{7}{9}$$

$$489)\ \sin\left[Arc\cos\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = \frac{4}{5} \qquad 490)\ \tan\left(\frac{1}{2}Arc\cos x\right) = \pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$491)\ 2\cos^2\left(\frac{1}{2}Arc\cos x\right) = 1+x \qquad 492)\ \sin\left(2Arc\cos\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$493)\ \sin\left[Arc\cot\tan(Arc\cos x)\right] = |x| \qquad 494)\ \cot\left(2Arc\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{4-x^2}{4x}$$

$$495)\ Arc\cot\left[\cot\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right] = \frac{9\pi}{10}$$

$$496)\ Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{7} = Arc\tan\frac{9}{13}$$

$$497)\ Arc\cos\frac{1}{5} + Arc\cos\left(-\frac{1}{5}\right) = \pi$$

$$498)\ Arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2} + Arc\tan\frac{\sqrt{2}}{2} = Arc\tan\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

499) $2Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{3}=Arc\tan 3$

500) $Arc\cot m=\pi+Arc\tan\frac{1}{m} \quad , \quad m\in R^{-}$

501) $\tan\left[Arc\tan x+Arc\tan\frac{1}{x}\right]=\infty$ 502) $\sin\left(3Arc\sin\frac{1}{3}\right)=\frac{23}{27}$

503) $\sin(2Arc\sin x)=2x\sqrt{1-x^2}$ 504) $\cos(2Arc\cos x)=2x^2-1$

505) $\cos(2Arc\sin x)=1-2x^2$

506) $Arc\sin\frac{12}{13}+Arc\sin\frac{3}{5}=Arc\cos\frac{-16}{65}$

507) $Arc\sin x+Arc\sin y=Arc\cos\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy\right) \quad 0\le x,y\le 1$

508) $Arc\sin x-Arc\sin y=Arc\sin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)$

509) $Arc\cos\frac{3}{5}-Arc\cos\frac{24}{25}=Arc\sin\frac{75}{125}$

510) $\cos\left[\frac{1}{2}Arc\cos\left(-\frac{1}{10}\right)\right]=\sqrt{\frac{9}{20}}$ 511) $\cot(Arc\tan x)=\frac{1}{x}$

512) $Arc\tan\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}$ 513) $Arc\tan\left(\tan\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}$

514) $Arc\tan\left(\tan\frac{20\pi}{7}\right)=-\frac{\pi}{7}$ 515) $\cos\left(Arc\tan\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$

516) $\tan^2\left(\frac{1}{2}Arc\cos\frac{x}{2}\right)=\frac{2-x}{2+x}$ 517) $Arc\tan\frac{1}{3}-Arc\cot\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{4}$

518) $\cot\left(2Arc\tan\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

519 **مثال)** د x کومو قیمتونو ته $Arc\cot\frac{1}{x}=Arc\tan x$ سم دی؟

520 **مثال)** له $Arc\cos x-Arc\sin x=\frac{\pi}{6}$ معادلې څخه د x قیمت ترلاسه کړئ.

521 **مثال)** له $Arc\cot x-Arc\tan x=\frac{\pi}{3}$ معادلې څخه د x قیمت ترلاسه کړئ.

522 **مثال)** که $y=\frac{\pi}{6}-Arc\tan x$ وي، د y حدود ترلاسه کړئ.

523 **مثال)** د $\tan(Arc\tan x)=5$ معادلې ځواب ترلاسه کړئ.

524 **مثال)** د $Arc\cos\frac{12}{13}$ قیمت د $Arc\sin$ له جنسه ترلاسه کړئ.

525 **مثال)** ثبوت کړئ که $u = Arc\cot\sqrt{\cos\alpha} - Arc\tan\sqrt{\cos\alpha}$ وي، په دې صورت کې $\sin u = \tan^2\frac{\alpha}{2}$ دی.

526 **مثال)** که له $R\times R$ څخه f تابع په $f(x) = \dfrac{Arc\tan\frac{x}{2} + Arc\tan\frac{x}{3}}{Arc\cot\frac{x}{2} + Arc\cot\frac{x}{3}}$ توګه تعریف شوې وي، ثبوت کړئ چې $f(1) = \frac{1}{3}$ دی.

527 **مثال)** د

$$Arc\sin\frac{24}{25} + Arc\cos\frac{3}{5} + Arc\tan\frac{12}{5} + Arc\cot\frac{15}{8} = Arc\sin\left(\frac{-744}{1105}\right)$$

مطابقت سموالی ثبوت کړئ.

528 **مثال)** د $Arc\sin\dfrac{2x}{1+x^2} + Arc\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} + Arc\tan\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{3\pi}{2}$ معادلې ځواب ترلاسه کړئ.

529 **مثال)** که $Arc\tan x + Arc\tan y + Arc\tan z = \pi$ وي، ثبوت کړئ چې $x + y + z = xyz$ دی.

530 **مثال)** که

$Arc\tan\ x + Arc\tan\ y + Arc\tan\ z = \frac{\pi}{2}, xy + yz + xz = 1$ وي، ثبوت کړئ چې.

531 **مثال)** د $Arc\tan = \sqrt{3}$ معادلې ځواب ترلاسه کړئ.

532 **مثال)** که $Arc\cos(\sin x) = \sin a$ وي، ثبوت کړئ چې $x + \sin a = \frac{\pi}{2}$ دی.

533 **مثال)** د $Arc\tan x + Arc\tan y = \frac{\pi}{4}$ څرګندونکې منحني کومه ده؟

534 **مثال)** د $Arc\sin(\cos x) = \frac{\pi}{3}$ معادلې ځوابونه په $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ واټن کې ترلاسه کړئ.

535 **مثال)** د $\tan(Arc\tan 3x + Arc\tan 2x) = 6x$ معادلې ځوابونه ترلاسه کړئ.

536 **مثال)** که $a = 2Arc\tan t$ وي، په دې صورت کې $\sin a$ ترلاسه کړئ.

537 **مثال)** $Arc\cos(1-2t^2) = 2Arc\sin t^2$ معادله څو ځوابونه لري؟

538 **مثال)** $(2x^2 - 3x + 1) + Arc\cos(x^3 - 3x + 3) = 0$ معادله څو حقیقي جذرونه لري؟

539 **مثال)** که $\tan(Arc\cot x) = 3x$ وي x ترلاسه کړئ.

12. د مثلثاتي نسبتونو او مثلثاتي نامساواتو د بدلون حدود

په دې برخه کې د څو نامساواتو په ثبوت بسنه کوو، د زیاتو توضحاتو لپاره نهم ټوک ته چې د نامساواتو په هکله دی ورشئ.

$$1)\ \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} => \begin{cases} -1 \le \cos x \le 1 \\ -1 \le \sin x \le 1 \end{cases} \\ \forall x \in \mathbb{R} => \begin{cases} -\infty < \tan x < +\infty \\ -\infty < \cot x < +\infty \end{cases} \end{cases}$$

2) دوه $\frac{2m}{1+m^2}$ او $\frac{1-m^2}{1+m^2}$ کسرونه تل د $[-1,1]$ ترمنځ تحول کوي او د یوه کمان د ساین او کوساین په توګه د منلو وړ دي، ځکه:

$$if \quad m = \tan\alpha => \begin{cases} \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \sin 2\alpha \ ;\ -1 \le \sin 2\alpha \le 1 => -1 \le \frac{2m}{1+m^2} \le 1 \\ \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan\alpha} = \cos 2\alpha \ ;\ -1 \le \cos 2\alpha \le 1 => -1 \le \frac{1-m^2}{1+m^2} \le 1 \end{cases}$$

3) که $\alpha < x < \beta$ وي، نشو کولای چې ددغه نامساواتو څخه مثلثاتي نسبت ونیسو، بلکې باید د مثلثاتي دایرې پرمخ د x کمان، وهل شوی مسیر مشخص کړو او د مثلثاتي نسبت تر ټولو لږ او ډیر د پام وړ قیمت له α څخه تر β پورې ترلاسه کړو.

4) $-\sqrt{2} \le \sin x \pm \cos x \le \sqrt{2}$

5) $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$

6) $1 < \sin x + \cos x \le \sqrt{2} \qquad ; \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

7) $-1 < \sin x - \cos x < 1 \qquad ; \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

8) $-\frac{1}{2} \le \sin x \cdot \cos x \le \frac{1}{2}$

9) $\frac{1}{2} \le \sin^4 x + \cos^4 x \le 1$

10) $\frac{1}{4} \le \sin^6 x + \cos^6 x \le 1$

11) $0 < x < \frac{\pi}{2} \quad m,n \in N \quad m,n \ge 2 : 0 < \sin^m x + \cos^n x \le 1$

ثبوت

$$0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0<\sin x<1 \Rightarrow 0<\sin^{m-2}x<1^{m-2} \Rightarrow \dfrac{\sin^m x}{\sin^2 x}<1 \\ 0<\cos x<1 \Rightarrow 0<\cos^{n-2}x<1^{n-2} \Rightarrow \dfrac{\cos^n x}{\cos^2 x}<1 \end{cases}$$

د پاسنيو نامساواتو دواړه خواوې له $\sin^2 x$ او $\cos^2 x$ سره چې مثبت اعداد دي ضربوو، (د نامساواتو جهت بدلون نه مومي)

$$if\quad \frac{\sin^m x}{\sin^2 x}<1 \Rightarrow \sin^2 x\cdot\frac{\sin^m x}{\sin^2 x}<\sin^2 x \Rightarrow \sin^m x<\sin^2 x$$

$$if\quad \frac{\cos^n x}{\cos^2 x}<1 \Rightarrow \cos^2 x\cdot\frac{\cos^n x}{\cos^2 x}<\cos^2 x \Rightarrow \cos^n x<\cos^2 x$$

د پاسنيو نامساواتو دواړه خواوې له يوه بل سره جمع کوو:

$$\sin^m x+\cos^n x<\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow \sin^m x+\cos^n x<1$$

12) $0<x<\dfrac{\pi}{2}\quad m,n>2:1<\sqrt[m]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}<2$

ثبوت

$$0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 0<\sin x<1 \Rightarrow \sqrt[m]{\sin x}<1 \\ 0<\cos x<1 \Rightarrow \sqrt[n]{\cos x}<1 \end{matrix}\right\rangle \sqrt[m]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}<2\quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} if\ \sin x<1 \Rightarrow \sin^{\left(\frac{1}{m}-2\right)}x>1^{\left(\frac{1}{m}-2\right)} \Rightarrow \sin^2 x\cdot\sin^{\left(\frac{1}{m}-2\right)}x>\sin^2 x \Rightarrow \sin^{\frac{1}{m}}>\sin^2 x \\ if\ \cos x<1 \Rightarrow \cos^{\left(\frac{1}{n}-2\right)}>1^{\left(\frac{1}{n}-2\right)} \Rightarrow \cos^2 x\cdot\cos^{\left(\frac{1}{n}-2\right)}x>\cos^2 x \Rightarrow \cos^{\frac{1}{n}}>\cos^2 x \end{cases}$$

د پاسنيو نامساواتو دواړه خواوې له يوه بل سره جمع کوو:

$$\sin^{\frac{1}{m}}x+\cos^{\frac{1}{n}}x>\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow \sin^{\frac{1}{m}}x+\cos^{\frac{1}{n}}x>1$$
$$\Rightarrow \sqrt[m]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}>1\qquad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{II}),(\mathrm{I}) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt[m]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}<2 \\ \sqrt[m]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}>1 \end{matrix}\right\rangle\ 1<\sqrt[m]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}<2$$

13) $1+\tan x<\dfrac{2}{\cos x}$

(که x په لومړي يا څلورمه ناحيه کې وي)

14) $\cot\dfrac{x}{2}>1+\cot x$

(که x په لومړي يا درېيمه ناحيه کې وي)

ثبوت

$$\cot\frac{x}{2} > 1+\cot x \Rightarrow \cot\frac{x}{2} > 1+\frac{\cot^2\frac{x}{2}-1}{2\cot\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow 2\cot^2\frac{x}{2} > 2\cot\frac{x}{2}+\cot^2\frac{x}{2}-1$$

$$\Rightarrow \cot^2\frac{x}{2}-2\cot\frac{x}{2}+1>0$$

$$\Rightarrow \left(\cot\frac{x}{2}-1\right)^2>0$$

$\left(\cot\frac{x}{2}-1\right)^2>0$ تل صدق کوي، په دې اساس $\cot\frac{x}{2}>1+\cot x$ نامساوات تل سم دي.

15) $\begin{cases}\tan x+\cot x\geq 2 & (I)\\ \tan x+\cot x\leq -2 & (II)\end{cases}$

(I) که x په لومړی یا درېیمه ناحیه کې وي.

(II) که x په دویمه یا څلورمه ناحیه کې وي.

ثبوت

$$\tan\alpha+\cot\alpha\geq 2 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\geq 2 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geq 2 \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha\leq\frac{1}{2}$$

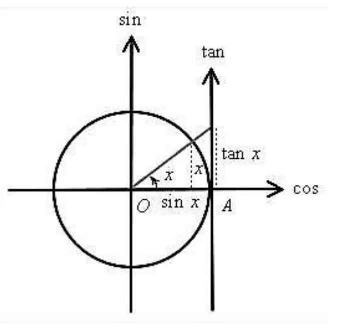
لاندې ثبوتوو چې پاسنی نامساوات تل صدق کوي.

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geq 0 \Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\geq 0$$

$$\Rightarrow 1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\geq 0$$

$$\Rightarrow 1\geq 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha\leq\frac{1}{2}$$



16) که $0<x<\frac{\pi}{2}$ وي تل $\sin x<x<\tan x$ دی.

(17

که $0 < x < \frac{\pi}{4}$ وي $\cos x > \sin x$ او $\cot x > \tan x$ دی.

که $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ وي $\sin x > \cos x$ او $\tan x > \cot x$ دی.

540 **مثال)** که $\sin x = 2m - 7$ وي د m حدود ترلاسه کړئ؟

541 **مثال)** که $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ او $\sin x = 2m - 7$ وي، د m حدود ترلاسه کړئ؟

542 **مثال)** که $-55° < x < 60°$ وي، د $\cos x$ حدود ترلاسه کړئ؟

543 **مثال)** که $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ او $8\cos^3 x = 6\cos x + 3m - 1$ وي، د m حدود ترلاسه **کړئ**؟

544 **مثال)** که $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{12}$ وي، د $\tan x$ حدود ترلاسه کړئ؟

545 **مثال)** لاندې کوم یو نامساوات د $40°$ او $50°$ زاویو ترمنځ پروت دی؟

(1 $\sin 50° < \sin 40°$ (2 $\cos 50° < \cos 40°$

(3 $\tan 50° < \tan 40°$ (4 $\cot 40° < \cot 50°$

546 **مثال)** که $\sin 2\alpha > 0$ او $\cos\alpha \tan\alpha < 0$ وي، په دې صورت کې د α کمان پای په کومه ناحیه کې پروت دی؟

547 **مثال)** لاندې کوم یو ځواب د m ټولو قیمتونو ته صدق کوي؟

(1 $\cos x = \frac{1-m^2}{1+m^2}$ (2 $\sin x = \frac{2m}{1+m^2}$

(3 $\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{1+m^2} \\ m = \cot x \end{cases}$ (4 درې واړه

548 **مثال)** که $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ او $\cos 2\alpha = \frac{1}{1-m}$ وي، په دې صورت کې د m د بدلونونو حدود وټاکئ.

549 **مثال)** که $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x \leq 1$ وي، په دې صورت کې د x د بدلونونو حدود وټاکئ.

550 **مثال)** ددې په فرضولو سره چې $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$ او $\cos 4x = 2k - 1$ وي، د k حدود ترلاسه کړئ.

551 **مثال)** که $\frac{13\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ او $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ وي، د y بدلون ترلاسه کړئ.

552 **مثال)** د $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$ نامساواتو ځواب ترلاسه کړئ.

553 **مثال)** $f(x) = \sin x + \sqrt{2}\cos x - 2$ معادله لرونکې منحني:

1) x محور قطع کوي. 2) پر x محور مماس ده.

3) د x محور پاس پرته ده. 4) د x محور لاندې پرته ده.

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وڅېړئ.

554) $\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x} = 2\cos x \quad , \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}$

555) $\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{|\sin x + \cos x|}{2} = \sin x \quad , \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

556 **مثال)** که چېرې γ, β, α د رادیان له جنسه د یوه مثلث درې زاویې وي، ثبوت کړئ چې $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \frac{\pi^2}{3}$ دی.

مثال) د لاندې نامساواتو سموالی وڅېړئ.

557) $\cot\frac{\alpha}{4} > 2 + \cot\alpha$

558) $1 < x\cos x < \sec x \quad , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

559) $\sin x + \cos x < 2 + x \quad , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

560) $x \cdot \cos^2 x < \sin x \quad , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

561 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $\hat{B} = 3\hat{A}$ وي، د $\cos A$ حدود ترلاسه کړئ.

562 **مثال)** که A او B د مثلث زاویې وي ثبوت کړئ چې $\sin A + \sin B > \sin(A+B)$ دی.

13. د مثلثاتي افادو max او min

په دې برخه کې د څو مثالونو په حل بسنه کوو، د زیاتو توضحاتو لپاره نهم ټوک ته چې د نامساواتو په هکله دی ورشئ.

مثال) د لاندې مثلثاتي افادو max یا min محاسبه کړئ.

563) $\min(3\sin x + 4\cos x)$

564) $\min\left(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x\right)$

565) $\begin{cases} \max(5 + 4\sin x) \\ \min(5 + 4\sin x) \end{cases}$

566) $\begin{cases} \max(A) \\ \min(A) \end{cases} \quad , \quad A = \frac{4 + 2\sin x}{5 - 3\cos y}$

567) $\begin{cases} \max(3-2\cos x) \\ \min(3-2\cos x) \end{cases}$ 568) $\begin{cases} \max(5\sin x-3) \\ \min(5\sin x-3) \end{cases}$

569) $\max\left(4\cos^2 x-2\cos x+5\right)$ 570) $\max\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\right), \pi \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$

571) $\begin{cases} \max\left(\sin^2 x\cos^4 x\right) \\ \min\left(\sin^2 x\cos^4 x\right) \end{cases}$

572) $if\ \ x+y=\theta \Rightarrow \begin{cases} \max(\sin x+\sin y) \\ \max(\sin x\cdot\sin y) \end{cases}$

573) $\max[\sin(x+y)+\cos(x-y)]$ 574) $\max\left(\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x-5\right|\right)$

575) $\max\left[\left(2a\sin^2 x+b\right)\left(2a\cos^2 x+b\right)\right]\ ,\ \ a\neq 0$

576) $\max\left(4\sin^2 x-2\sin x+2\right)$ 577) $\max[4\sin x(3-4\sin x)]$

578) $\max\left(\sin^4 x\cdot\cos^6 x\right)$ 579) $\min\left(\tan^2 x+\cot^4 x\right)$

580) $if\ \ \tan x+\cot x=2 \Rightarrow \tan^7 x+\cot^6 x=?$

581) $if\ \ \tan x+\cot x=-2 \Rightarrow \tan^{100} x+\cot^{91} x=?$

582) $if\ \ \cos x+\cos y=1 \Rightarrow \min\left(\cos^3 x+\cos^3 y\right) \Rightarrow$

583) $if\ \ x+y=60^\circ \Rightarrow \max(\cos x\cdot\cos y)$

584) $if\ \ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \Rightarrow \max(\sin A+\sin B+\sin C)=?$

585) $\min(2+\cos x-\cos y)$ 586) $\min\left(\dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\cot\alpha+\cos\alpha}\right)$

587) $\max(5-3\sin x\cos x)$ 588) $\min\left(2\cos^2 x+\sin 2x+1\right)$

589) $\max\left[\sin 3x\cdot\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

14. شرطي مطابقتونه

ددې په پام کې نيولو سره چې د يوه مثلث د دريو زاويو مجموع 180 او د هر څلورضلعي د زاويو مجموع 360 ده، ځينې مطابقتونه ترلاسه کولی شو چې د ځو مسئلو په حل سره يې در پېژنو:

مثال) د لاندې شرطي مطابقتونو سموالی وځېړئ.

590) $if\ \ \alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$

591) $if\ \ \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\alpha\cdot\tan\gamma=1$

592) $if\ \ \alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$

593) $if\ \ \alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\gamma\tan\beta+\tan\gamma\cdot\tan\alpha=1$

594) $if\ \ \alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\cot\alpha\cdot\cot\beta+\cot\gamma$

595) $if\ \ a+\beta+\gamma=k\pi \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$

596) $if\ \ a+\beta+\gamma=k\pi \Rightarrow \cot\alpha\cdot\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cdot\cot\alpha=1$

597) $$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta=1\\ (1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2\end{cases} \\ \\ \alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\beta=-1\\ (1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=2\end{cases}\end{cases}$$

598) $if\ \ \alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geq 1$

599) $if\ \ \alpha+\beta+\gamma=k\pi \Rightarrow \cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 1$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وښيئ.

600) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

601) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C-1$

602) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}$

603) $\tan 55^\circ-\tan 10^\circ-\tan 55^\circ\tan 10^\circ=1$

604) $\tan 100^\circ\tan 130^\circ+\tan 130^\circ\tan 40^\circ+\tan 100^\circ\tan 40^\circ=1$

605) $\tan 15\cot 65+\tan 25\cot 40+\tan 50\cot 75=1$

606) $(1+\tan 10^\circ)(1+\tan 35^\circ)=2$

607 **مثال)** که $\tan a+\tan 2a=\tan 3a$ وي، د $\tan a\cdot\tan 2a\cdot\tan 3a$ قيمت څومره دی.

15. په مثلثاتو کې سلسلې

په الجبر او انالیز کې مو ولیدل چې:

په يوه عمومي قاعده لکه a_i کې، چې i ته ورته متغير اساسي نقش لري، که چېرې د i پرځای له 1 څخه تر n پورې طبيعي اعداد وضع کړو، n حدونه په $a_1, a_2, \cdots, a_n$ توګه ترلاسه کيږي.

ددغه n جملو مجموع ته سلسله وايي او عمومي قاعدې ته يې عمومي حد وايي.

مثلاً که عمومي حد $a_1=\cos[\alpha+(i-1)\beta]$ وي، د اړونده سلسلې حدونه عبارت دي له:

$i=1 \Rightarrow a_1=\cos\alpha$

$i=2 \Rightarrow a_2=\cos(\alpha+\beta)$

$i=3 \Rightarrow a_3=\cos(\alpha+2\beta)$

$\vdots$

$i=n \Rightarrow a_n=\cos[\alpha+(n-1)\beta]$

اړونده سلسله عبارت ده له:

$$S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos[\alpha+(n-1)\beta]=\sum_{i=1}^{n}\cos[\alpha+(i-1)\beta]$$

په ابتکاري طريقو کولو شو S په ځينو سلسلو کې ترلاسه کړو.

لومړی طريقه)

که په يوه n حد لرونکې سلسله کې، وکولی شو $a_n=f(n+\alpha)-f(n)$ ته ورته رابطه ترلاسه کړو (α صحيح عدد دی)، بيا نو کولی شو محدود يا نامحدود سلسلې محاسبه کړو.

مثال) لاندې مجموع محاسبه کړئ:

608) $S=\cos 2x\cdot \operatorname{cosec}3x+\cos 6x\cdot \operatorname{cosec}9x+\cdots+\cos 2\cdot 3^{n-1}x\cdot \operatorname{cosec}3^{n}x$

609) $S=Arc\tan\dfrac{1}{3}+Arc\tan\dfrac{1}{7}+\cdots+Arc\tan\dfrac{1}{1+n+n^2}$

610) $S=\dfrac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}+\dfrac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}+\cdots+\dfrac{1}{\cos nx\cdot\cos(n+1)x}$

دويمه طريقه)

د ساين او کوساين له محدود مجموع سره د کار په صورت کې کولی شو د مجموع د محاسبې لپاره عمومي طريقه ترلاسه کړو (چې اړونده کمانونه يې حسابي تصاعد وي).

د دا شان مجموع عمومي حالت په لاندې توګه دی:

$$S_1=\sin a+\sin(a+d)+\sin(a+2d)+\cdots+\sin[a+(n-1)d]$$
$$S_2=\cos a+\cos(a+d)+\cos(a+2d)+\cdots+\cos[a+(n-1)d]$$

په هر يوه دغه مواردو کې که د مساواتو دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{d}{2}$ (د ساين دوه چنده او د نسبت نيمايي) سره ضرب کړو او بيا د مساواتو د ښي لور ټول حدونه په يوه مجموع واړوو، نو د پام وړ مجموع ترلاسه کيږي.

مثال) لاندې مجموع محاسبه کړئ:

611) $S=\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x$

612) $S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos[\alpha+(n-1)\beta]$

613) $S=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos 3\alpha}+\dfrac{1}{\sin 3\alpha\sin 5\alpha}+\cdots$

614) $S=\csc\alpha+\csc 2\alpha+\cdots+\csc 2^{n-1}\alpha$

615) $S=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2^{i-1}}\tan\dfrac{\alpha}{2^{i-1}}$

616) $S=\sum_{i=1}^{n}\cos^2[\alpha+(i-1)\beta]$

617) $S = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha$

618) $S = \sin^3\alpha + \sin^3 2\alpha + \cos^3 3\alpha + \cdots + \sin^3 n\alpha$

619) $S = \sum_{i=1}^{n} \sin^3(2i-1)\alpha$

16. مثلثاتي معادلې

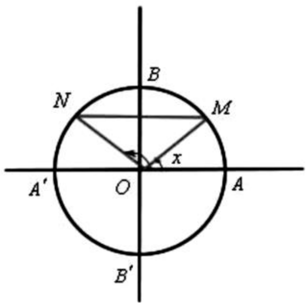
16 − 1) سریزه

د مثلثاتي معادلو څخه منظور د یوې مجهولې زاویې د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ د مساواتو څرنګوالی دی، چې دغه مساوات د مجهولې زاویې ځینو قیمتونو ته صدق کوي او ځینو ته یې صدق نه کوي.

مثلاً $\sin x = \frac{1}{2}$ مساوات یوه مثلثاتي معادله ده، ددغه معادلې یو له ځوابونو څخه $x = \frac{\pi}{6}$ دی.

اما ایا $\frac{\pi}{6}$ د معادلې یوازینی ځواب دی؟

ددې پوښتنې د ځواب لپاره لاندې شکل ته ځېر شئ:



لیدل کیږي چې که x ته د مخامخ کمان پای په M یا N نقطو کې وي، د زاویې د ساین قیمت به $\frac{1}{2}$ وي.

N نقطه د $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ زاویې سره متناظره ده. نو تر دې دمه مو په یوه مکمل دوران کې ددې معادلې دوه ځوابونه ترلاسه کړي.

که وغواړو چې ددغه معادلې عمومي ځوابونه ترلاسه کړو، نو $2\pi + \frac{\pi}{6}, \cdots$ زاویې هم ددغه معادلې ځوابونه دی، نو یوه مثلثاتي معادله ممکن بې شمېره ځوابونه ولري.

د مثلثاتي زاویې د حل څخه موخه د مجهول زاویې د هغه قیمتونو ترلاسه کول دي چې د هغه لپاره راکړل شوی مساوات صدق وکړي، د یوه مثلثاتي معادلې په حل کې ددې په لټه یو چې α ته ورته زاویه ترلاسه کړو، داسې چې یوه له لاندو مساواتو څخه ترلاسه شي.

$\sin x = \sin\alpha$

$\cos x = \cos\alpha$

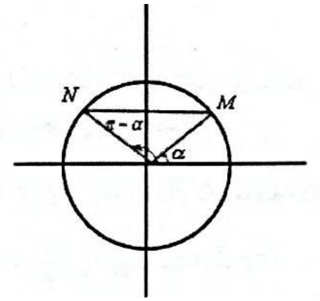
$\tan x = \tan\alpha$

$\cot x = \cot\alpha$

تعريف (16 – 2

1) **د** $\sin x = \sin\alpha$ **ته ورته معادلو عمومي ځوابونه:**

که یوه زاویه معلومه وي او ولرو چې $\sin x = \sin\alpha$ ، په دې صورت کې د α مرکزي زاويې مخامخ کمان د پای نقطې یعنې M څخه یو عمود په ساین محور رسموو او تر هغه ادامه ورکوو څو دایره په N نقطه کې قطع کړي.

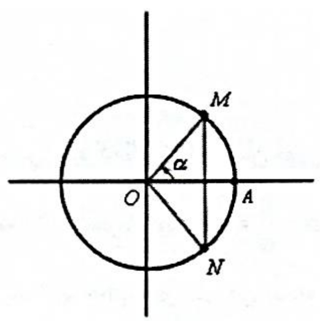


په دې صورت کې د معادلې عمومي ځوابونه په لاندې توګه دي:

$$=> \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

2) **د** $\cos x = \cos\alpha$ **ته ورته معادلو عمومي ځوابونه:**

که α زاویه معلومه وي او ولرو چې $\cos x = \cos\alpha$ ، د ټولو هغه x ته ورته زاويو په لټه کې یو څو په دغه مساواتو کې صدق وکړي، په دې صورت کې د α مرکزي زاويې مخامخ کمان له پای نقطې یعنې M څخه یو عمود په کوساین محور رسموو او تر هغه ادامه ورکوو څو دایره په N نقطه کې قطع کړي.

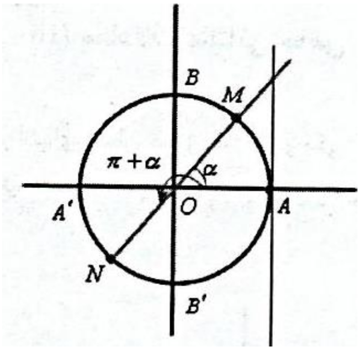


ښکاره ده چې $A\hat{O}N = -\alpha$ دی او مساوات د $-\alpha$ لپاره صدق کوي، نو کولی شو ووایو په دې حالت کې عمومي ځوابونه مساوي دي په:

$$=> \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

3) د $\tan x = \tan\alpha$ ته ورته معادلو عمومي ځوابونه

فرضوو α زاويه معلومه وي او ولرو چې $\tan x = \tan\alpha$ ، د ټولو هغه x ته ورته زاويو په لټه کې يو څو په دغه مساواتو کې صدق وکړي، فرضوو چې د α مرکزي زاويې مخامخ کمان د پای نقطه M وي، M نقطه O مرکز لور ته امتداد ورکوو او تر هغه ادامه ورکوو ترڅو مثلثاتي دايره په N نقطه کې قطع کړي.



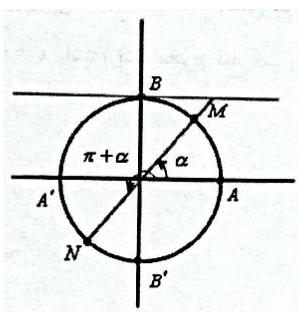
څرنګه چې وينو M نقطه د $2k\pi+\alpha$ او $2k\pi+\pi+\alpha$ سره متناظره ده، نو ځکه ويلی شو چې د معادلې عمومي ځوابونه په $\tan x = \tan x$ توګه دي.

$$\Rightarrow x = k\pi + \alpha \ , \ (k \in \mathbb{Z})$$

دلته يوازې يو ډله ځواب موجود دی.

4) د $\cot x = \cot\alpha$ ته ورته معادلو عمومي ځوابونه

فرضوو α زاويه معلومه وي او ولرو چې $\cot x = \cot\alpha$ ، د ټولو هغو x ته ورته زاويو په لټه کې يو ترڅو په دغه مساواتو کې صدق وکړي، فرضوو چې د α مرکزي زاويې مخامخ کمان د پای نقطه M وي، M نقطه O مرکز لور ته امتداد ورکوو او تر هغه ادامه ورکوو ترڅو مثلثاتي دايره په N نقطه کې قطع کړي.



څرنګه چې ليدل کيږي M نقطه د $N, 2k\pi+\alpha$ او $2k\pi+\pi+\alpha$ سره متناظره ده، نو ويلی شو که د α د پاسنۍ معادلې يو ځواب وي، عمومي ځوابونه له لاندې قاعدې څخه ترلاسه کيږي.

$$\Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ليدل کيږي چې د دوو $\tan x = \tan\alpha$ او $\cot x = \cot\alpha$ معادلو عمومي ځوابونه يو شان دي.

16 – 3) ځانګړې مثلثاتي معادلې

که د x کمان پای په B', A', B, A نقطو کې وي، هره یوه پاسنۍ معادله په ځانګړي حالت اوړي، چې د هر ځانګړي حالت په لیدو سره کولی شو د معادلې عمومي ځواب په چټکتیا سره ترلاسه کړو.

1) $\sin x = 0 <=> x = k\pi \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$

2) $\sin x = 1 <=> x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (مضاعف جذر لري)

4) $\sin x = -1 <=> x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}$ (مضاعف جذر لري)

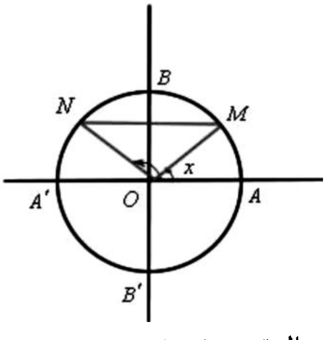
5) $\cos x = 0 <=> x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

6) $\cos x = 1 <=> x = 2k\pi$ (مضاعف جذر لري)

7) $\cos x = -1 <=> x = (2k+1)\pi$ (مضاعف جذر لري)

8) $\tan x = 0 <=> x = k\pi$

9) $\cot x = 0 <=> x(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$



باید ووایو چې $\tan x$ هغه مهال تعریف شوی دی چې د تانجانت د مخرج جذر یعنې $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ وي او $\cot x$ هغه مهال تعریف لري چې د کوتانجانت د مخرج جذر یعنې $x \neq k\pi$ وي.

$$10)\ \left.\begin{cases} \sin^2 x = \sin^2 \alpha \\ \cos^2 x = \cos^2 \alpha \\ \tan^2 x = \tan^2 \alpha \\ \cot^2 x = \cot^2 \alpha \end{cases}\right\rangle \ x = k\pi \pm \alpha$$

مثال) لاندې معادلې حل کړئ.

620) $2\sin x - 1 = 0$ 621) $2\sin 2x + \sqrt{2} = 0$

622) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$

623) $2\cos x-\sqrt{2}=0$

624) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=0$

625) $2\cos\frac{x}{2}+1=0$

626) $\tan x-\sqrt{3}=0$

627) $\sqrt{3}\tan x+1=0$

628) $\tan 2x+1=0$

629) $3\cot x-\sqrt{3}=0$

630) $\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-3=0$

631) $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$

632) $2\cos^2 x+\cos x=0$

633) $\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x=0$

634) $3\cot^2 x-\sqrt{3}\cot x=0$

635) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

636) $2\cos^2 x-\left(\sqrt{2}+2\right)\cos x+\sqrt{2}=0$

637) $3\tan^2 x-4\sqrt{3}\tan x+3=0$

638) $\cot^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\cot x+\sqrt{3}=0$

639) $4\sin^2 x-1=0$

640) $4\cos^2 x-3=0$

641) $\tan^2 x-3=0$

642) $\sin^2 x+\cos x=1$

643) $2\sin x\cdot\cos x-\sin x=0$

644) $\sin x+\cos x-\sin x\cdot\cos x=1$

645) $\sin^2 x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos^2 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=0$

646) $3\sqrt{3}\sin^3 x+\cos x=\sin^2 x\cos x$

647) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$

648) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{12}+2x\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2x\right)}=2-\sqrt{3}$

649) $\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-3x\right)+2=0$

650) $\tan\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{8}-x\right)=2\sqrt{2}$

651) $\cos 4x-\cos x=0$

652) $\tan^3 x-3\sqrt{3}=0$

653) $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos 2x=0$

654) $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0$

655) $\tan\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

656) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+2\cos\left(\frac{5\pi}{8}-x\right)=3$

657) $\sin x - \cos x = \frac{1-\tan x}{2}$

658) $\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+2\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

659) $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3=0$

660) $\tan\left(2+\sqrt{2}\right)\sin x\cdot\cos x-\sqrt{x}\cos^2 x=1$

661) $\tan x+\sin x(1-\tan x)+\cos^2 x=1$

662) $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

663) $\cos 2x+\sin x-1=0$

664) $\cos 2x+\cos x+1=0$

665) $\sin 3x+\sin x=0$

666) $\cos 2x+\cos\frac{x}{2}=0$

667) $\sin 3x-\cos\frac{x}{2}=0$

668) $\tan 2x+\tan\frac{x}{2}=0$

669) $\tan(2x)-\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

670) $1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0$

671) $\tan^3 x-\tan^2 x+1=\tan x$

672) $2\sin^2\left(x+\frac{5\pi}{8}\right)+\sin\left(x+\frac{5\pi}{8}\right)-1=0$

673) $\sin x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$

674) $\frac{\cos(270-x)}{\cot x}=\frac{1}{3}$

675) $2\cos^2 x-1=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

676) $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\cos x$

677) $\frac{1+\cos x}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$

678) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

679) $\tan x+\tan 2x=\tan 3x$

680) $\sin^3 x\cdot\cos x-\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$

681) $\tan\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\tan\left(1-\frac{x}{3}\right)=-1$

682) $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos x$

683) $\sin(a-x)=\sin a-\sin x$

684) $\sin 9x+\sin 5x+2\sin^2 x=1$

685) $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$

686) $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$

687) $\frac{1}{4}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin x\cdot\cos x$

688) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

689) $\sin^6 x+\cos^6=1$

690) $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{1}{2}$ 691) $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x+\cos x$

692) $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x$

693) $3\sqrt{3}\sin x-\cos x=3\sqrt{3}\csc x-\sec x$

694) $\cos 4x-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$ 695) $2\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x$

696) $3\cos 2x+\cos 6x=\dfrac{1}{2}$ 697) $\cos 7x+\cos 3x+1=2\cos^2 x$

698) $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2 x}=1$

699) $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)$

700) $\sqrt{2}\sin 4x-\sin 3x=\sin 5x$ 701) $\tan x=\tan 2x\cdot\tan 3x\cdot\tan 4x$

702) $\cos 5x\cdot\cos 3x+\sin 3x\sin x=\cos 2x$

703) $\sin^3 3x+\sin^3 2x=\sin^2 x(\sin 3x-\sin 2x)$

704) $\log\sin x+\log\cos x=\dfrac{1}{2}\log 3-2\log 2$

705) $\left(\sqrt{2+\sqrt{43}}\right)^{\tan x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{\tan x}=2$

706) $1-\sqrt{2}\cos x=2\cos x-\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\tan^2 x}$

707) $2\sin^3 x+2\cos^3 x=\sin x+\cos x$

708) $\dfrac{\sin 3x+\sin x}{\cos 3x+\cos x}=\sqrt{3}$ 709) $3\sqrt{3}\sin^3 x+\cos x=\cos x\sin^2 x$

709) $3\sqrt{3}\sin^3 x+\cos x=\cos x\sin^2 x$

710) $\cos^3 x+\sin^3 x+\sin x\cos^2 x+\cos x\sin^2 x=\sqrt{2}\cos x$

711) $2(\sin x+\cos x)^2-\left(2+\sqrt{2}\right)(\sin x+\cos x)+\sqrt{2}=0$

712) $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\cos 4x$

713) $\sin x\cdot\sin 4x=\cos 3x$ 714) $\tan x=\dfrac{\tan\frac{x}{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+1}$

715) $\cos^3 x(\cos 3x-\cos 2x)+\cos^3 2x(\cos x-\cos 3x)+\cos^3 3x(\cos 2x-\cos x)=0$

716) $6\sin^2 3x+\cos 12x=4$

717) $\cos 5x + \cos 3x + \sin 5x + \sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$

718) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$

719) $2\left(2-\sqrt{3}\right)\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 1 + \cos\left(8x - \frac{\pi}{5}\right)$

720) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$

721) $\frac{\cos 7x}{\cos^2 3x} = 1 - \tan^2 3x$

722) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 = 0$

723) $4\left(\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \sin^3 x\right) = \cot x - \tan x$

724) $\cos x \cdot \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x = \frac{\sin 5x}{32\sin x}$

725) $(\cos 3x - \sin 3x)(\cos 4x - \sin 4x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 7x$

726) $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin^2 2x - \cos^2 4x$

727) $\sin x \cdot \cos x(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = -\frac{1}{8}$

728) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 3x$

729) $\tan^3 x = -\tan x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

730) $16\sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

731) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ 732) $\cos 3x = -\cos x$

733) $8\cos x \cos 2x \cdot \cos 4x = 1$ 734) $\sin 3x = 2\sin x$

735) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$ 736) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

737) $4\tan x\left(1 - \tan^2 x\right) = \left(1 + \tan^2 x\right)^2$ 738) $\frac{\cos 5x}{\cos^2 2x} = 1 - \tan^2 2x$

739 **مثال)** $\tan x + \frac{\cos x + 2\sin x}{\cos x + \sin x} = k$ مثلثاتي معادله فرض شوې:

1) د k کوم قيمت ته معادله دوه x' او x'' ځوابونه لري؟

2) k داسې وټاکئ چې $x' + x'' = Arc\tan 2$ وي.

3) د k په کوم قیمت $x' - x'' = \dfrac{\pi}{4}$ کیږي؟

740 **مثـــال)** کــــه a او b او c او d د یــــوه تصــــاعد متــــوالي حدونــــه وي، $\sin ax \cdot \sin bx = \sin cx \cdot \sin dx$ معادله حل کړئ.

741 **مثال)** $\tan x \cdot \cot 4x = 1$ معادله په $(0, \pi)$ واټن کې څو جذرونه لري؟

742 **مثال)** $1 + \tan^2 \dfrac{x}{2} = \cos x$ معادله څو ډله ځوابونه لري؟

743 **مثال)** آیا $\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{8} - x\right) = 3$ معادله یو $x = \dfrac{5\pi}{8}$ ځواب لري؟

744 **مثال)** د $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$ معادلې درې حقیقي جذرونه معرفي کړئ.

745 **مثال)** $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = n$ معادله څو ډله ځوابونه لري؟

746 **مثال)** $\sin x \cdot \cos^2 x = 1$ معادله په $[0, 2\pi]$ واټن کې څو جذرونه لري.

747 **مثال)** $\tan x \tan 2x = a$ معادله په کوم حالت کې ځواب لري؟

1) $a \in R$ 2) $0 \le a \le 2$

3) $a \ge 0$ یا $a < -2$ 4) $-2 \le a < 0$

748 **مثال)** د m کومو قیمتونو ته $\cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2} = 2m - 1$ معادله ځواب لري؟

749 **مثال)** $\cot\dfrac{x}{2} - \tan\dfrac{x}{2} = 2\sqrt{3}$ معادله په $[0, 2\pi]$ واټن کې څو ځوابونه لري؟

750 **مثال)** $\dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = 1$ معادله په $[0, 2\pi]$ واټن کې څو ځوابونه لري؟

751 **مثال)** که x' او x'' د $\tan^2 x - 2k\tan x + k - 1 = 0$ معادلې ځوابونه او $x' + x'' = \dfrac{3\pi}{4}$ وي د k قیمت ترلاسه کړئ.

752 **مثال)** د $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{\tan x} + \left(2 + \sqrt{3}\right)^{\tan x} = 2$ معادلې ځواب ترلاسه کړئ.

753 **مثال)** ثبوت کړئ چې د $4x\left(1 - x^2\right) = \left(1 + x^2\right)^2$ معادلې یو ځواب مساوي په $\left(\sqrt{2} - 1\right)$ دی.

754 **مثال)** که $\tan x + \dfrac{\sin x + 3\cos x}{2\sin x + \cos x} = k$ معادله ځواب ولري، د k حدود وټاکئ.

755 **مثال)** په $m\sin x + 2m - 1 = 0$ مثلثاتي معادلـه کې د m قیمـت داسې وټـاکئ څـو معادلـه مضاعف جذر ولري.

756 **مثـال)** پـه لانـدې مثلثـاتي معادلـه کـې $(a+1)\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 2a - 1 = 0$, a داسـې وټاکئ ترڅو معادله مضاعف جذر ولري.

4 – 16) د $(Bioche)$ بیوش قاعده

1) که چېرې په یوه معادله کې x کمان په $-x$ واړوو او معادله بدلون ونه مومي $\cos x$ مرستیال مجهول وضع کوو.

د $3\sin^2 x-\cos x=1$ معادلې د حل لپاره لرو چې:

$$3\sin^2(-x)-\cos(-x)=1 \Rightarrow 3(-\sin x)^2-\cos x=1$$
$$\Rightarrow 3\sin^2 x-\cos x=1$$
$$\Rightarrow 3(1-\cos^2 x)-\cos x=1$$
$$\Rightarrow 3\cos^2 x+\cos x-2=0$$

مخکې مو د دا شان معادلو د حل طریقه بیان کړه.

2) که چېرې په یوه معادله کې x کمان په $\pi-x$ واړوو او معادله بدلون ونه مومي $\sin x$ مرستیال مجهول وضع کوو.

د حل لپاره یې $2\cos 2x-4\sin x+1=0$ معادله حلوو.

$$2\cos 2(\pi-x)-4\sin(\pi-x)+1=0 \Rightarrow 2\cos 2x-4\sin x+1=0$$
$$\Rightarrow 2(1-2\sin^2 x)-4\sin x+1=0$$
$$\Rightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0$$

مخکې د دا شان معادلو حل وڅېړل شو.

3) که چېرې په یوه معادله کې x کمان په $\pi+x$ واړوو او معادله بدلون ونه مومي $\tan x$ مرستیال مجهول وضع کوو.

د حل لپاره یې $\cos x-2\sin x=\frac{1}{\cos x}$ معادله حلوو.

$$\cos x-2\sin x=\frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos(\pi+x)-2\sin(\pi+x)=\frac{1}{\cos(\pi+x)}$$
$$\Rightarrow -\cos x+2\sin x=-\frac{1}{\cos x}$$
$$\Rightarrow \cos x-2\sin x=\frac{1}{\cos x}$$

د حل لپاره یې، د معادلې دواړه خواوې په $\cos x\neq 0$ تقسیموو:

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x}-2\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow 1-2\tan x=1+\tan^2 x$$
$$\Rightarrow \tan^2 x+2\tan x=0$$

مخکې مو ددغه ډول معادلو حل وڅېړلو.

4) که په معادله کې یو له دغه دریو مواردو څخه سم نه وي، $\tan\frac{x}{2}$ مرستیال مجهول وضع کوو.

د حل لپاره یې $\sin^2 x+\sin 2x=1+3\cos x$ معادله حلوو.

$$\sin^2 x+\sin 2x=1+3\cos x \Rightarrow (\sin x)^2+2\sin x\cdot\cos x=1+3\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{4\tan^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^2}+2\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\times\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=1+3\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

نو له ساده کولو وروسته هغه معادله ترلاسه کیږي چې مخکې مو یې د حل په څرنګوالي خبرې کړي.

5 – 16) کلاسیک معادلې

1 – 5 – 16) لومړی ډول کلاسیک

ټولې هغه معادلې چې په $a\sin z+b\cos z=c$ شکل دي، لومړی ډوله کلاسیک معادلې نومیږي، چې په دغه معادله کې z مجهول کمان او a ، b او c عددي قیمتونه دي، لکه:

$$2\sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \qquad \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2 \qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

ددغه شان معادلو د حل لپاره په عمومي حالت کې دوې طریقې موجودې دي.

لومړی طریقه

په $a\sin z+b\cos z=c$ معادله کې د $\sin z$ او $\cos z$ پرځای اړونده معادلې یې په لاندې توګه وضع کوو او د $\tan\frac{z}{2}$ له جنسه یوې دویمه درجه معادلې ته رسیږو:

$$\sin z=\frac{2\tan\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}} \quad , \quad \cos z=\frac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}$$

$$a\sin z+b\cos z=c \Rightarrow a\left(\frac{2\tan\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}\right)+b\left(\frac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}\right)=c$$

$$\Rightarrow a\left(2\tan\frac{z}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{z}{2}\right)=c\left(1+\tan^2\frac{z}{2}\right)$$

$$\Rightarrow c+c\tan^2\frac{z}{2}-2\tan\frac{z}{2}-b+b\tan^2\frac{z}{2}=0$$

$$=> (c+b)\tan^2\frac{z}{2} - 2a\tan\frac{z}{2} + c - b = 0 \qquad (I)$$

(I) معادله د $\tan\frac{z}{2}$ له جنسه دويم درجه ده او هغه مهال ځواب لري چې $\Delta' \geq 0$ وي.

$$\Delta' \geq 0 => b'^2 - ac \geq 0 => (-a)^2 - (c+b)(c-b) \geq 0 => a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0$$

$$=> a^2 + b^2 \geq c^2 \qquad (II)$$

(II) رابطه په لومړی ډوله کلاسيک معادله کې د ځواب د موجوديت شرط دی او که ياده رابطه صدق وکړي، معادله ځواب لري.

مثال) لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

757) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$ 758) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$

759) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ 760) $3\sin x + 4\cos x = 4$

761) $4\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2\sqrt{2} - 1$ 762) $2\sin x - 3\cos x = 2$

763 **مثال)** $3\sin x + 4\cos x = m$ معادله د m کومو قيمتونو ته ځواب لري؟

764 **مثال)** $4\tan^2\alpha\sin x + 4\tan\alpha\cos x = 5\tan^2\alpha + 1$ معادله د α کومو قيمتونو ته ځواب لري؟

765 **مثال)** ددې لپاره چې $a(1-\sin x) = b(1+\cos x)$ معادله ځواب ولري، بايد a او b (دلته a او b د صفر خلاف دي):

1) دواړه مثبت وي. 2) دواړه منفي وي.

2) مختلف العلامه وي. 4) متحد العلامه وي.

766 **مثال)** ثبوت کړئ که $(\sin a + \sin b)\sin x - (\cos a + \cos b)\cos x = \sqrt{2}$ معادله ځواب لرونکی وي، په دې صورت کې $\frac{\pi}{2} \leq a - b \leq -\frac{\pi}{2}$ دی.

767 **مثال)** د k حدود د α يوه مثلثاتي خط له جنسه داسې وټاکئ چې $2\cos^2\alpha\cos 2x + \sin 2\alpha\sin 2x = k$ معادله ځواب لرونکې وي. $(\cos > 0)$.

768 **مثال)** د $4\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\sin x + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos x = 5\tan^2\frac{\alpha}{2} + 1$، معادلې له حل پرته، α معلوم قوس داسې وټاکئ چې لاندې معادله تل ځواب ولري.

769 **مثال)** $\sin^2 a\sin x + \cos^2 a\cos x = 2$ معادله د a کومو قيمتونو ته ځواب لري؟

770 **مثال)** $(k-2)\sin x - 2k\cos x = 2k + 4$ مثلثاتي معادله فرضوو، که x' او x'' ددغه معادلې جذرونه وي، د k کومو قيمتونو ته $x' + x'' = \frac{3\pi}{2}$ رابطه صدق کوي؟

771 **مثال)** په $(m+1)\sin x - m\cos x = m = 0$، معادله کې m داسې وټاکئ چې $|x'-x''| = \frac{\pi}{2}$ رابطه صدق وکړي.

772 **مثال)** $k\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ معادله فرضوو، که x' او x'' ددغه معادلې جذرونه وي، د k کوم قیمت ته $x'+x'' = \frac{2\pi}{3}$ رابطه صدق کوي؟

773 **مثال)** $(\sin a + \sin b)\sin x - (\cos a + \cos b)\cos x = \sqrt{2}$ معادله حل کړئ.

774 **مثال)** $(a+1)\sin 2x + \cos 2x = a\sin^2 x + 2a\cos^2 x$ حل او وڅېړئ.

یادونه (ځانګړي حالتونه)

1) که په لومړی ډوله کلاسیک معادله کې $a\sin z + b\cos z = c$, $a = b$ وي، د معادلې جذرونه د یوه بل متمم دی، یعنې $x'+x'' = \frac{\pi}{2}$.

$$a\sin z + b\cos z = c \xrightarrow{if\ a=b} x'+x'' = \frac{\pi}{2}$$

ثبوت

$$x + x'' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x'+x''}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{2} + \frac{x''}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x'}{2} + \frac{x''}{2}\right) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{x'}{2} + \tan\frac{x''}{2}}{1 - \tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x'}{2} + \tan\frac{x''}{2} = 1 - \tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x'}{2} + \tan\frac{x''}{2} + \tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2} = 1 \qquad (i)$$

$(c+b)\tan^2\frac{z}{2} - 2a\tan\frac{z}{2} + c - b = 0$ معادله فرض شوې:

$$\begin{cases} S = \tan\frac{x'}{2} + \tan\frac{x''}{2} = -\frac{B}{A} = -\frac{-2a}{c+b} = \frac{2a}{c+b} \\ P = \tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2} = \frac{C}{A} = \frac{c-b}{c+b} \end{cases}$$

$$(I): \tan\frac{x'}{2}+\tan\frac{x''}{2}+\tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2}=1$$

$$=> \left(\tan\frac{x'}{2}+\tan\frac{x''}{2}\right)+\left(\tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2}\right)=1$$

$$=> \left(\frac{2a}{c+b}\right)+\left(\frac{c-b}{c+b}\right)=1 => \frac{2a+c-b}{c+b}=1$$

$$=> 2a+c-b=c+b$$

$$=> 2a=2b$$

$$=> a=b$$

$$if \quad b=\pm a => a\sin x \pm a\cos x = c => \sin x \pm \cos x = \frac{c}{a}$$

$$=> \sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{c}{a} => \sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{c\sqrt{2}}{2a}$$

2) کـه پـه لـومړی ډولـه کلاسـيک معادلـه کـې $a\sin z + b\cos z = c$, $b=0$ او $\left|\frac{c}{a}\right|\le 1$ وي، د معادلې دوه جذرونه د يوه بل مکمل دي يعنې $x'+x''=\pi$ کيږي.

$$a\sin z + b\cos z = c \xrightarrow{b=0\left|\frac{c}{a}\right|\le 1} x'+x''=\pi$$

ثبوت

$$x'+x''=\pi => \frac{x'}{2}+\frac{x''}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$=> \tan\left(\frac{x'}{2}+\frac{x''}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{2}$$

$$=> \frac{\tan\frac{x'}{2}+\tan\frac{x''}{2}}{1-\tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2}}=\infty$$

$$=> 1=\tan\frac{x'}{2}\cdot\tan\frac{x''}{2}=0$$

$$=> 1-\frac{C}{A}=0$$

$$=> 1-\frac{c-b}{c+b}=0$$

$$=> c+b=c-b$$

$$=> 2b = 0$$

$$=> b = 0$$

$$if \quad b = 0 => a\sin z + (0)\cos z = c$$

$$=> a\sin z = c$$

$$=> \sin z = \frac{c}{a}$$

$$if \quad -1 \le \sin z \le 1 => -1 \le \frac{c}{a} \le 1 => \left|\frac{c}{a}\right| \le 1$$

3) که په لومړی ډوله کلاسیک معادله کې $a\sin z + b\cos z = c$, $a = 0$ او $\left|\frac{c}{b}\right| \le 1$ وي، د دوو کمانونو جذرونه د یوه بل مخالف العلامه دي، یعني $x' + x'' = 0$.

$$a\sin z + b\cos z = c \xrightarrow{a=0,\left|\frac{c}{b}\right|\le 1} x' + x'' = 0$$

ثبوت

$$x' + x'' = \pi => \frac{x'}{2} + \frac{x''}{2} = 0$$

$$=> \tan\left(\frac{x'}{2} + \frac{x''}{2}\right) = \tan 0$$

$$=> \frac{\tan\frac{x'}{2} + \tan\frac{x''}{2}}{1 - \tan\frac{x'}{2} \cdot \tan\frac{x''}{2}} = 0$$

$$=> \tan\frac{x'}{2} \cdot \tan\frac{x''}{2} = 0$$

$$=> \frac{2a}{c + b} = 0$$

$$=> a = 0$$

$$if \quad a = 0 => (0)\sin z + b\cos z = c$$

$$=> b\cos z = c$$

$$=> \cos z = \frac{c}{b}$$

$$if \quad -1 \le \cos z \le 1 => -1 \le \frac{c}{b} \le 1 => \left|\frac{c}{b}\right| \le 1$$

4) په $a\sin z + b\cos z = c$ لومړی ډوله کلاسیک معادله کې که چېرې b او c د یوه بل مخالف العلامه وي، د معادلې یو ځواب په $z = 2k\pi + \pi$ توګه او بل ځواب یې په $\tan\frac{z}{2} = \frac{c}{a}$ توګه دی.

$$a\sin z + b\cos z = c \xrightarrow{b=-c} \begin{cases} z = 2k\pi + \pi \\ \tan\frac{z}{2} = \frac{c}{a} \end{cases}$$

ثبوت

$$b = -c \Rightarrow b + c = 0$$

$$(c+b)\tan^2\frac{z}{2} - 2a\tan\frac{z}{2} + c - b = 0 \Rightarrow (0)\tan^2\frac{z}{2} - 2a\tan\frac{z}{2} + c + c = 0$$

$$\Rightarrow -2a\tan\frac{z}{2} + 2c = 0$$

$$\Rightarrow \tan\frac{z}{2} = \frac{c}{a}$$

پام مو وي چې په $(c+b)\tan^2\frac{z}{2} - 2a\tan\frac{z}{2} + c - b = 0$ دویمه درجه معادله کې که د $\tan^2\frac{z}{2}$ ضریب یعنې $(c+b)$ صفر لور ته تقرب وکړي، نو یو جذر ∞ ته تقرب کوي. (د دویمه درجه معادلو مفهوم ته ورشئ)

$$if \quad c + b \to 0 \Rightarrow \tan\frac{z}{2} \to \infty$$

$$\Rightarrow \tan\frac{z}{2} = \tan\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z = 2k\pi + \pi$$

5) په $a\sin z + b\cos z = c$ لومړی ډوله کلاسیک معادله کې ، که چېرې $c = 0$ وي، معادلې ته ناقص لومړی ډوله کلاسیک معادله وایي او کولی شو دغه معادله په لاندې توګه حل کړو.

ثبوت

$$if \;\; c = 0 \Rightarrow a\sin z + b\cos z = 0$$

د معادلې دواړه خواوې په $\cos z \neq 0$ یا $\sin z \neq 0$ تقسیموو:

$$\Rightarrow \frac{a\sin z}{\cos z} = \frac{b\cos z}{\cos z} = 0$$

$$\Rightarrow a\tan z + b = 0$$

$$\Rightarrow \tan z = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \tan z = \tan\alpha \quad ; \quad \tan\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = Arc\tan\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow z = k\pi + \alpha$$

$$\Rightarrow z = k\pi + Arc\tan\left(-\frac{b}{a}\right)$$

775 **مثال)** $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ مثلثاتي معادله حل کړئ.

مثال) لاندې معادلې حل کړئ.

776) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

777) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

778) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$

779 **مثال)** $(2m-3)\sin x - (m+1)\cos x = 2m-1$ معادله فرضوو.

1) وټاکئ چې معادله تل ځواب لري.

2) m داسې وټاکئ څو د معادلې جذرونه دوه د یوه او بل مکمل کمانونه وي.

3) m داسې وټاکئ څو د معادلې جذرونه دوه د یوه او بل متمم کمانونه وي.

4) m داسې وټاکئ څو معادله دوه مختلف العلامه جذرونه ولري.

780 **مثال)** په $2(m+1)\sin x + (m-2)\cos x = 2m$ معادله کې:

1) د m حدود داسې وټاکئ څو معادله دوه د یوه او بل متمم جذرونه ولري.

2) د m حدود داسې وټاکئ څو معادله دوه د یوه او بل مکمل جذرونه ولري.

781 **مثال)** $(m-1)\sin x + (m+1)\cos x = 2m$ مثلثاتي معادله فرضوو.

1) د m حدود داسې وټاکئ څو معادله ځواب ولري.

2) د m حدود داسې وټاکئ څو معادله دوه متمم جذرونه ولري.

3) د m حدود داسې وټاکئ څو معادله دوه مکمل جذرونه ولري.

4) د m حدود داسې وټاکئ څو معادله دوه مختلف العلامه جذرونه ولري.

5) د m حدود داسې وټاکئ چې په معادله کې $\dfrac{\cos\left(\frac{x'}{2} - \frac{x''}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x'}{2} + \frac{x''}{2}\right)} = 1$ رابطه صدق وکړي.

دویمه طریقه

په $a\sin z + b\cos z = c$ لومړی ډوله کلاسیک معادله کې د $a \neq 0$ په فرضولو سره د معادلې دواړه خواوې پر a تقسیموو.

$$a\sin z+b\cos z=c \Rightarrow \sin z+\frac{b}{a}\cos z=\frac{c}{a} \quad ; \quad if \ \frac{b}{a}=\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \sin z+\tan\alpha\cdot\cos z=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \sin z+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos z=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin z\cdot\cos\alpha+\cos z\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(z+\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \sin(z+\alpha)=\frac{c}{a}\cdot\cos\alpha$$

د $-1\le\frac{c}{a}\cos\alpha\le 1$ او $\frac{c}{a}\cos\alpha=\sin\beta$ په فرضولو سره لرو چې:

$$\Rightarrow \sin(z+\alpha)=\sin\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z+\alpha=2k\pi+\beta \Rightarrow z=2k\pi+\beta-\alpha \\ z+\alpha=2k\pi+\pi-\beta \Rightarrow z=2k\pi+\pi-\beta-\alpha \end{cases}$$

مثال) لاندې معادلې حل کړئ.

782) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

783) $(\sqrt{3}+1)\sin 2x+(\sqrt{3}-1)\cos 2x=\sqrt{2}$

784) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2$

785) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

درېیمه طریقه

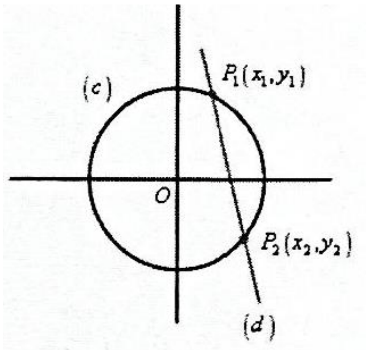
پوهېږو که $p(x,y)$ د مثلثاتي دایرې($x^2+y^2=1$ معادله لرونکې دایرې) یوه نقطه وي، په دې صورت کې $\begin{cases} x=\cos z \\ y=\sin z \end{cases}$ دی، نو $a\sin z+b\cos z=c$ معادله په $ay+bx=c$ توګه رامنځته کیږي، نو باید د $ay+bx=c$ خط او $C: x^2+y^2=1$ واحد دایرې د مماس نقطه ترلاسه کړو.

د $\begin{cases} d: ay+bx=c \\ C: x^2+y^2=1 \end{cases}$ سیستم ځوابونه د (C) دایرې او (d) خط د مماس مختصات دي:

I. که d خط C دایره په $p_1(x_1,y_2)$ او $p_2(x_2,y_2)$ نقطو کې قطع کړي معادله دوه ډله ځوابونه لري.

II. که d خط پر C دایرې مماس وي معادله یوازې یوه ډله ځواب لري.

III. که d او C دایره د مماس نقطه ونلري، معادله ځواب نلري.



يادونه

ددې لپاره چې d خط، C دايره قطع نـه کـړي، اړينـه او کـافي ده چې لـه d خط څخـه د O نقطې (ددايرې مرکز) واټن د دايرې د شعاع لـه طـول (1) څخـه وړوکـې وي. هغـه مهـال d خـط پـه C دايـره مماس دی چې د O نقطې او ياد خط ترمنځ واټن د دايرې د شعاع په اندازه يعنې 1 وي.
که دغه واټن له 1 څخه ستر وي، d خط او دايره د تماس نقطه نلري.

$$OH=\frac{|c|}{\sqrt{b^2+a^2}}\ ,\ O(0,0)$$

که خط او دايره دوه د تماس نقطې ولري: $(OH)^2=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}<1 => a^2+b^2>c^2$

که خط او دايره پر يوه او بل مماس وي: $(OH)^2=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}=1 => a^2+b^2=c^2$

که خط او دايره د تماس نقطه ونلري: $(OH)^2=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}>1 => a^2+b^2<c^2$

786 **مثال)** وښيئ چې که په $a\cos t+b\sin t=c$ کلاسيک معادلـه کـې، $a^2+b^2=c^2$ ولـرو، پـه دې صورت کې ياده معادله په $[0,2\pi]$ انټروال کې يوازې يو ځواب لري.

2 – 5 – 16) دويم ډوله کلاسيک معادله

لومړۍ طريقه

ددويم ډولـه کلاسـيک معـادلې عمـومي شـکل پـه $a\tan x+b\cot x=c$ توګـه دی او د حـل عمـومي طريقه په لاندې توګه ده:

$$a\tan z+b\cot z=c => a\tan z+\frac{b}{\tan z}=c$$

$$=> \frac{a\tan^2 z+b}{\tan z}=c$$

$$=> a\tan^2 z+b=c\cdot\tan z$$

$$=> a\tan^2 z-c\tan z+b=0$$

د $\tan z$ له جنسه ددويم درجه معادلې د ځواب شرط په لاندې توګه محاسبه کيږي.

$$\Delta \ge 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \ge 0$$
$$\Rightarrow (-c)^2 - 4(a)(b) \ge 0$$
$$\Rightarrow c^2 \ge 4ab$$

دې ته پام سره چې په دويم ډوله کلاسيک معادله يعنې $a\tan z + b\cot z = c$ کې د ځواب شرط په $c^2 \ge 4ab$ توګه دی، نو لاندې ټکو ته پام وکړئ.

يادونه (ځانګړي حالات)

1) که په دويم ډوله کلاسيک معادله کې a او b هم علامه نه وي، معادله حتمن ځواب لري او که $c^2 = 4ab$ وي معادله مضاعف جذر لري.

2) ددې لپاره چې دويم ډوله کلاسيک معادله دوه د يوه او بل متمم جذرونه ولري اړينه ده چې $a = b$ وی:

ثبوت

$$x' + x'' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x' = \frac{\pi}{2} - x''$$
$$\Rightarrow \tan x' = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x''\right)$$
$$\Rightarrow \tan x' = \cot x''$$
$$\Rightarrow \tan x' = \frac{1}{\tan x''}$$
$$\Rightarrow \tan x' \cdot \tan x'' = 1$$
$$\Rightarrow P = 1$$
$$\Rightarrow \frac{+b}{a} = 1$$
$$\Rightarrow b = a$$

($P = \tan x' \cdot \tan x''$ د $a\tan^2 z - c\tan z + b = 0$ معادلې د جذرونو حاصلضرب دی)

3) ددې لپاره چې دويم ډوله کلاسيک معادله دوه د يوه بل مکمل جذرونه ولري شرط دا دی چې $c = 0$ او $ab \le 0$ وي.

ثبوت

$$x' + x'' = \pi \Rightarrow \tan(x' + x'') = \tan\pi$$
$$\Rightarrow \tan(x' + x'') = 0 \Rightarrow \frac{\tan x' + \tan x''}{1 - \tan x' \tan x''} = 0$$
$$\Rightarrow \tan x' + \tan x'' = 0$$
$$\Rightarrow S = 0$$

$$=> \frac{c}{a} = 0$$
$$=> c = 0$$

($S = \tan x' + \tan x''$ د $a\tan^2 z - c\tan z + b = 0$ معادلې د جذرونه مجموع ده)

دويمه طريقه

که د $a\tan z + b\cot z = c$ معادلې دواړه خواوې له $\sin z \cdot \cos z$ سره ضرب کړو، نو لرو چې:

$$a\tan z + b\cot z = c => \sin z \cdot \cos z(a\tan z + b\cot z) = c\sin z \cdot \cos z$$
$$=> a\tan z \cdot \sin z \cdot \cos z + b\cot z \cdot \sin z \cdot \cos z = c\sin z \cdot \cos z$$
$$=> a\sin^2 z + b\cos^2 z = c\sin z \cdot \cos z$$
$$=> a\left(\frac{1-\cos 2z}{2}\right) + b\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right) = \frac{1}{2}c\sin 2z$$
$$=> a(1-\cos 2z) + b(1+\cos 2z) = c\sin 2z$$
$$=> (a - a\cos 2z) + (b + b\cos 2z) = c\sin 2z$$
$$=> c\sin 2z + (a-b)\cos 2z = a+b$$

پاسنۍ معادله، لومړۍ ډوله کلاسيک معادله ده، چې د حل طريقه يې مخکې وښېړل شوله.

مثال) لاندې معادلات حل کړئ.

787) $\tan x + 3\cot x = 2\sqrt{3}$

788) $\tan x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3} + 1$

789) $\tan x - 2\cot x = -1$

790) $\tan 2x + \cot 2x = 2\sqrt{3}$

791) $\sqrt{3}\tan 2x + (2-\sqrt{3})\cot 2x = 2\sqrt{3} - 2$

792) $\tan\left(x + \frac{\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{14} - x\right) = 2$

793 **مثال)** په $(m-1)\tan x + (m+1)\cot x = 2$ معادله کې د m حدود داسې وټاکئ څو معادله ځواب ولري.

794 **مثال)** په $\tan x + \sqrt{3}\sin\alpha \cdot \cot x = \cos\alpha$ معادله کې α معلوم قوس داسې وټاکئ څو د جذرونو ترمنځ يې $x' + x'' = \frac{\pi}{4}$ رابطه صدق وکړي.

795 **مثال)** m داسې وټاکئ څو $(m^2-1)\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2(m-1)$ معادله ځواب ولري.

796 **مثال)** $\tan x + (2-m)\cot x = 2m$ حل کړئ او ويې څېړئ.

797 **مثال)** $\tan(\cot x) = \cot(\tan x)$ حل کړئ او ويې څېړئ.

798 **مثال)** $a\tan x + b\cot x = a+b$ معادله فرضوو $\tan x$ مساوي په څو دی؟

799 **مثال)** که x' او x'' د $\tan x + k\cot x = 5$ معادلې جذرونه وي، د k کومو قيمتونو ته $\cos(x'-x'') = 3\cos(x'+x'')$ رابطه صدق کوي؟

800 **مثال)** $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ معادله په $[0, \pi]$ واټن کې څو ځوابونه لري.

801 **مثال)** که $\tan x - 3\cot x = k$ او $x'+x'' = Arc\tan 2$ وي k ترلاسه کړئ.

3 – 5 – 16) درېيم ډوله کلاسيک معادلې

د درېيم ډوله کلاسيک معادلې عمومي شکل په لاندې توګه دی.

$$a\sin^2 z + b\sin z \cdot \cos z + c\cos^2 z = d$$

يادونه1- که $a \neq d$ وي، کولی شو د پاسنۍ معادلې دواړه خواوې په $\cos^2 z$ تقسيم کړو، ترڅو د $\tan z$ له جنسه يوه دويم درجه معادله ترلاسه کړو.

$$a\sin^2 z + b\sin z \cdot \cos z + c\cos^2 z = d$$

$$\Rightarrow \frac{a\sin^2 z}{\cos^2 z} + \frac{b\sin z \cdot \cos z}{\cos^2 z} + \frac{c\cos^2 z}{\sin^2 z} = \frac{d}{\cos^2 z}$$

$$\Rightarrow a\tan^2 z + b\tan z + c = d\left(1 + \tan^2 z\right)$$

$$\Rightarrow (a-d)\tan^2 z + b\tan z + (c-d) = 0$$

يادونه 2 - که $a = d$ وي، کولی شو د پاسنۍ معادلې دواړه خواوې په $\sin^2 z$ تقسيم کړو، ترڅو د $\cot z$ له جنسه يوه دويمه درجه معادله ترلاسه کړو.

$$a\sin^2 z + b\sin z \cdot \cos z + c\cos^2 z = d$$

$$\Rightarrow \frac{a\sin^2 z}{\sin^2 z} + \frac{b\sin z \cdot \cos z}{\sin^2 z} + \frac{c\cos^2 z}{\sin^2 z} = \frac{d}{\sin^2 z}$$

$$\Rightarrow a + b\cot z + c\cot^2 z = d\left(1 + \cot^2 z\right)$$

$$\Rightarrow (a-d)\cot^2 z + b\cot z + (a-d) = 0$$

په وروستي حالت کې مو که دواړه خواوې په $\cos^2 z$ تقسيم کړې وی، له دې چې $a = d$ دی، نو د دويمه درجه حد ضريب صفر کېدا او $\tan z \to \infty$ يعنې $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ او يو له ځوابونو حذف کېدلو.

يادونه

په دواړو پاسنيو حالتونو کې د ځواب د امکان شرط په لاندې توګه دی.

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4(a-d)(c-d) \geq 0$$

مثال) لاندې معادلې حل کړئ.

802) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$

803) $3\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 3$

804) $3\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=\frac{3\sqrt{3}-1}{4}$

805) $\cos a\cdot\cos b\sin^2 x-\sin a\sin b\cos^2 x=\sin(a-b)\sin x\cdot\cos x$

806 **مثال)** د m حدود له $\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x=m$ معادلې څخه داسې وټاکئ، ترڅو معادله ځواب ولري.

807 **مثال)** $(2a+1)\sin^2 x+(2a+3)\sin x\cdot\cos x+(2a+5)\cos^2 x=-\frac{11}{2}$ معادله فرضوو:

لومړی) د a په بیلابیلو قیمتونو خبرې وکړئ.

دویم) د a قیمت داسې وټاکئ ترڅو $x'+x''=\frac{3\pi}{4}$ وي(x' او x'' د معادلې د جذرونو اصلي قیمتونه دي).

808 **مثال)** که $2a\sin^2 x+2b\sin x\cos x+2c\cos^2 x=a+b+c$ وي، $\tan x$ مساوي په ځومره دی؟ $(a\neq b+c)$.

809 **مثال)** که $\sin^2 x+b\sin 2x=4$ او $x'+x''=\frac{\pi}{4}$ وي b ترلاسه کړئ.

810 **مثال)** که $2\sin^2 x+\sin x\cos x=\frac{3}{2}$ وي $\tan x$ ترلاسه کړئ.

811 **مثال)** که $2\cos^2 x+2m\sin x\cdot\cos x=m$ معادله ځواب ولري د m د بدلون حدود ترلاسه کړئ.

4 – 5 – 16) څلورم ډوله کلاسیک معادلې

د څلورم ډوله کلاسیک معادلو عمومي شکل په لاندې توګه دی.

1. $a(\sin z+\cos z)+b\sin z\cdot\cos z=c$
2. $a(\sin z-\cos z)+b\sin z\cdot\cos z=c$

لومړی طریقه

د څلورم ډوله کلاسیک معادلو د حل لپاره، کولی شو له لاندې رابطو څخه کار واخلو.

$$if\ \begin{cases}\sin z+\cos z=\sqrt{2}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin z\cdot\cos z=\cos^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$a(\sin z+\cos z)+b\sin z\cdot\cos z=c\Rightarrow a\left[\sqrt{2}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right]+b\left[\cos^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]=c$$

$$\Rightarrow b\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+a\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{b}{2}-c=0$$

پاسنۍ دويم درجه معادله د $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ له جنسه ده.

$$if \quad \begin{cases} \sin z-\cos z=\sqrt{2}\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin z\cdot\cos z=\frac{1}{2}-\sin^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$a(\sin z-\cos z)+b\sin z\cdot\cos z=c => a\left[\sqrt{2}\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right]+b\left[\frac{1}{2}-\sin^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right]=c$$

$$=> -b\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+a\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{b}{2}-c=0$$

پاسنۍ دويم درجه معادله د $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ له جنسه ده.

مثال) لاندې معادلې حل کړئ.

812) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2\sin x\cdot\cos x=1$

813) $\sin 2x+\cos 2x-\sin 2x\cdot\cos 2x=1$

814) $\sqrt{2}(\sin x-\cos x)+2\sin 2x=2$

815 **مثال)** په $\tan x+\sin 2m\cdot\cot x=\sqrt{2}(\sin m-\cos m)$ ، معادله کې m کمان داسې وټاکئ ترڅو د جذرونو ترمنځ يې $\tan x'+\tan x''+\tan x'\tan x''=1$ رابطه صدق وکړي.

816 **مثال)** په $a(\sin x+\cos x)+\sin 2x=1$ معادله کې:

لومړی) a داسې وټاکئ ترڅو د معادلې ځواب $\frac{\pi}{2}$ وي.

دويم) د $a=1$ لپاره معادله حل کړئ.

817 **مثال)** $2\sin 2x+4\tan a\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan\alpha-1$ مثلثاتي معادله فرضوو:

لومړی) وښيئ چې د معادلې يو جذر تر α پورې اړوند نه دی.

دويم) په $-\frac{\pi}{12}<x<\frac{7\pi}{12}$ شرط سره، α کمان په مثلثاتي دايره کې داسې وټاکئ، ترڅو د معادلې بل ځواب د منلو وړ وي.

دويمه طريقه

د دا شان معادلو د حل لپاره، د يوه مرستيال مجهول په ټاکلو سره معادله په يوه الجبري معادله اړوو، چې د معادلې له حل وروسته، يوه لومړی ډوله کلاسيک معادله ترلاسه کيږي.

$if \quad a(\sin z+\cos z)+b\sin z\cdot\cos z=c$

فرض: $\sin z+\cos z=y => (\sin z+\cos z)^2=y^2$

$$\Rightarrow \sin^2 z+\cos^2 z+2\sin z\cdot\cos z=y^2$$
$$\Rightarrow 2\sin z\cdot\cos z=y^2-1$$
$$\Rightarrow \sin z\cdot\cos z=\frac{y^2-1}{2}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned}&\sin z+\cos z=y\\&\sin z\cdot\cos z=\frac{y^2-1}{2}\end{aligned}\right\rangle\ a(y)+b\left(\frac{y^2-1}{2}\right)=c$$

$$if\quad a(\sin z-\cos z)+b\sin z\cdot\cos z=c$$

فرض: $\sin z-\cos z=y \Rightarrow (\sin z-\cos z)^2=y^2$

$$\Rightarrow \sin^2 z+\cos^2 z-2\sin z\cdot\cos z=y^2$$
$$\Rightarrow \sin z\cdot\cos z=\frac{1-y^2}{2}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned}&\sin z-\cos z=y\\&\sin z\cdot\cos z=\frac{1-y^2}{2}\end{aligned}\right\rangle\ a(y)+b\left(\frac{1-y^2}{2}\right)=c$$

مثال) لاندې معادلې حل کړئ.

818) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2\sin x\cdot\cos x=1$

819) $(\sin x-\cos x)+\sin x\cdot\cos x=1$

820) $\sec x+\csc x=2\sqrt{2}$

6 – 16) د مثلثاتي معادلو حل او سپړنه

لومړی د مثلثاتي فورمولونو او الجبري مطابقتونو په ذریعه معادلې په تر ټولو ساده حالت اړوو او په هغه صورت کې مثلثاتي مجهول خط ترلاسه کوو.

لاندې حالتونه ممکن منځته راشي:

1) که د معادلې ځواب د ساین یا کوساین له جنسه وي، د بحث لپاره د پارامترونو ځواب په $[-1,1]$ واټن کې وضع کوو.

2) که د معادلې جذر د تانجانت یا کوتانجانت له جنسه وي، د ټولو هغو قیمتونو لپاره چې د معادلې جذرونه ټاکو، معادله ځواب ورته لري، ځکه تانجانت او کوتانجانت ټول حقیقي قیمتونه ترلاسه کولی شي.

یادونه

که په دوو پاسنیو حالتونو کې د بحث لپاره محدوده واټن راکړل شوې وي، لومړی د مجهول مثلثاتي خط د بدلون حدود په هغه واټن کې څېړو او په یاد واټن کې د معادلې په جذرونو خبرې کوو.

مثال) لاندې معادلې حل کړئ.

821) $2\sin x \cdot \cos x - m\cos x = 0$

822) $\sin 4x - \sin 2x = k\sin x$

823) $m\tan x - m + 1 = 0$

824) $m\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$

825) $2\sin x - m + 1 = 0 \quad , \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}$

826) $4\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2m + \sqrt{2} - 2 \quad , \quad -\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$

827) $\sin^2 x - (2k+1)\sin x + 2k = 0$

828) $\sin 6x - (k-4)\cos 4x - \sin 2x = 0$

829) $\tan^2 x - (m-1)\tan x + 1 = 0$

830) $\frac{\cos^4 m}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4 m}{\sin^2 x} = 1$

831) $\sin 4x - \sin 2x = m\sin x \quad , \quad -\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$

832) $\sin 4x = k\tan 2x \quad , \quad -\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$

833) $k\cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \quad ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{4} \ , \ k > 0$

834) $k\sin 2x + 4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4 - k \quad ; \quad \frac{5\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12} \ , \ k > 0$

835) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \frac{k}{2\sin x} \quad ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{12}$

836) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x = k\sin 3x \quad ; \quad -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$

837) $(m+1)\cos 2x - 8m\left(\cos^4\frac{x}{2} + \sin^4\frac{x}{2}\right) + 7(m-1) = 0$

838) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right) = m\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

839 **مثال)** که $2\sin x + 2\cos x - \sin x\cos x = 2$ وي $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ترلاسه کړئ.

7 – 16) د الجبري معادلو په حل کې د مثلثاتو کارونه

دغه طريقه چې غالباً د تحليلي طريقې (د منحني له رسمولو څخه د معادلې د جذرونو ټاکلو) پـه پرتلـه ښه ده، ځکه په چټکۍ او آسانۍ د مسئلې په حل کې مرسته کوي او له دې چې د مسئلې ځوابونه د يوه مثلثاتي نسبت د مضرب په توګه ترلاسه کيږي، د کمانونو د مثلثاتي قيمتونو له جدول څخه، د معـادلې د جذرونو عددي قيمتونه په اسانۍ ټاکل کيږي.

840 **مثال)** $x^3 + px + q = 0$ درېيم درجه معادله حل کړئ.

841 **مثال)** $8x^3 - 6x = \sqrt{2}$ معادله حل کړئ.

17. مثلثاتي سيستمونه

1 – 17) کلاسيک سيستم

17 – 1 – 1) لومړی ډوله کلاسيک سيستم

ددغه سيستم کلي شکل په لاندې توګه دی:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \pm \sin y = a \end{cases} , \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \pm \cos y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} , \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

څرنګه چې ليدل کيږي، د دوو کمانونو مجموع يا تفاضل او ضمنا د هم نومه مثلثاتي نسبتونو مجموع يا تفاضل له مجهول کمانونو، معلومېدای شي.

ددې سيستم د حل لپاره، دويمه معادله د ضرب په حاصل اړوو، او د دوو کمانونو د مجموع يا تفاضل د معلوموالي په صورت کې يې ټاکلی شو.

مثال) لاندې سيستمونه حل کړئ.

842) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 843) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{4} \\ \tan x - \tan y = 2 \end{cases}$

844) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$ 845) $\begin{cases} x - y = 75^\circ \\ \sin 4x + \sin 4y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

846) $\begin{cases} x + 3y = \dfrac{3\pi}{4} \\ \cos x - \cos 3y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 847) $\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3} \\ \cos \pi x + \cos \pi y = 1 \end{cases}$

848) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \tan x+\tan y=4 \end{cases}$

849 **مثـــال)** ثبــوت کــړئ چــې $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x-\sin y=m \end{cases}$ سیســـتم هغــه مهــال ځــواب لــري چــې $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$ وي.

2 – 1 – 17) **دويم ډوله کلاسيک سيستم**

ددغه سیستم عمومي شکل په لاندې توګه دی:

$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \cos x\cdot\cos y=a \end{cases}$; $\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\cdot\cos y=a \end{cases}$, $\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\cdot\sin y=a \end{cases}$

$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \cot x\cdot\cot y=a \end{cases}$, $\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \tan x\cdot\tan y=a \end{cases}$

ددغه سیستم د حل لپاره د دوو کمانونو مجموع یا تفاضل معلوم دي، باید د سیستم دویمه معادلـه پـه مجموع واړوو او له هغه ځخه د دوو کمانونو مجموع یا تفاضل ترلاسه کړو او بیا x او y وټاکو.

مثال) لاندې سیستمونه حل کړئ.

850) $\begin{cases} x-y=\dfrac{2\pi}{y} \\ \cos x\cdot\cos y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

851) $\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ \cot x\cdot\cot y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

852) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \tan x\cdot\tan y=-3 \end{cases}$

853) $\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{6} \\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

854) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ \tan x\cdot\tan y=3-\sqrt{2} \end{cases}$

855) $\begin{cases} 2x+3y=\dfrac{\pi}{3} \\ \cos 2x\cdot\cos 3y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

856 **مثال)** $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \tan x\cdot\tan y=1 \end{cases}$ سیستم څو ځوابونه لري؟

857 **مثال)** ثبوت کړئ چې $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2} \\ \tan x\cdot\tan y=1 \end{cases}$ سیستم بې شمېره ځوابونه لري.

858 **مثال)** $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x\sin y=1 \end{cases}$ سیستم په $[0,2\pi]$ واټن کې څو ځوابونه لري؟

3 – 1 – 17) درېیم ډوله کلاسیک سیستم

ددغه سیستم عمومي شکل په لاندې توګه دی:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=a \end{cases}\ ,\quad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=a \end{cases}\ ,\quad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}\ ,\quad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\cot x}{\cot y}=a \end{cases}$$

د دا شان مثلثاتي سیستمونو د حل لپاره، د سیستم د دویمې معادلې په دواړو خواوو کې، په صورت کې د نسبت له ترکیب او په مخرج کې د نسبت له تفصیل څخه، د دوو همنومو مثلثاتي نسبتونو مجموع یا تفاضل ته رسیږو او وروسته یې په حل پیل کوو.

مثال) لاندې مثلثاتي سیستمونه حل کړئ.

859) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2 \end{cases}$

860) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{12} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=\sqrt{3} \end{cases}$

861 **مثال)** له $x-y=\dfrac{\pi}{3}$ او $\dfrac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3}$ سیستم څخه د $\cot\dfrac{x+y}{2}$ قیمت ترلاسه کړئ.

2 – 17) غیر کلاسیک سیستمونه

دغه سیستمونه د عمومي شکل درلودونکي نه دي او د حل ځانګړې طریقه هم نلري، چې د څو مثالونو په حل سره یې څېړو:

مثال) لاندې سیستمونه حل کړئ.

862) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{4} \\ \sin^2 x-\sin^2 y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

863) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=\sin(x+y)+2 \end{cases}$

864) $\begin{cases} x-2y=0 \\ \sin x+\cos 2y-\sin(x+2y)=1 \end{cases}$

865) $\begin{cases} \tan x+\tan y=2 \\ 2\cos x\cdot\cos y=1 \end{cases}$

866) $\begin{cases} \sin(x+y)=\cos(x-y) \\ \tan x-\tan y=1 \end{cases}$

867) $\begin{cases} \sin(x-y)+\cos(x-y)=\sqrt{2} \\ \dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}=\sqrt{3} \end{cases}$

868) $\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=2 \\ \sqrt{3}(\tan x+\tan y)=4 \end{cases}$

869) $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y}=2 \\ 2\sin x\cdot\cos y=\sqrt{3} \end{cases}$

870) $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y}=2 \;\; ; \;\; 0<x,y<\dfrac{\pi}{2} \\ \tan(x+y)-\tan(x-y)=-2\sqrt{3} \end{cases}$

871) $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{y}{2}=1-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$

872) $\begin{cases} \sin(x+y)+\sin(x-y)=\dfrac{3}{2} \;\; ; \;\; 0<x \;\; , \;\; y<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos^2\dfrac{x+y}{2}+\sin^2\dfrac{x-y}{2}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

873) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3} \\ 4\sin^3 x+4\sin^3 y-9\cos\dfrac{x-y}{2}=1 \end{cases}$

874) $\begin{cases} \sin(x+y)=\cos(x-y) \\ \tan x-\tan y=1 \end{cases}$

875) $\begin{cases} 4\sin^3 x\cdot\cos y=\sqrt{2}\sin 3x \;\; ; \;\; 0<x,y<\dfrac{\pi}{2} \\ 4\cos^3 x\cdot\cos y=-\sqrt{2}\cos 3x \end{cases}$

876) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=1 \\ \cos x+\cos y=1 \end{cases}$

877) $\begin{cases} \sin(x+y)=\cos(x-y) \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

878) $\begin{cases} \sin 2x+\sin 2y=\sqrt{2} \\ \cos 2x+\cos 2y=0 \end{cases}$

879) $\begin{cases} \sin x\cdot\cos y=\dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

880) $\begin{cases} \cos x+\cos y=\dfrac{1}{2} \\ \cos 3x+\cos 3y=-1 \end{cases}$

881) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sin^2 x+\sin^2 y-\cos(x-y)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

882) $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin^2 x+\sin^2 y=1-\cos\alpha \end{cases}$

883) $\begin{cases} \tan x+\tan y=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ \cot x+\cot y=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

884) $\begin{cases} \tan^2 x+\tan^2 y=6 \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}+\dfrac{\tan y}{\tan x}=-6 \end{cases}$

885) $\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y)=\sin(x-y) \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2 \end{cases}$

886) $\begin{cases} \sin x+\sin y=2\sin\alpha \\ \cos x+\cos y=2\cos\alpha \end{cases}$

887 **مثال)** $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{12} \\ \sin^2 2x-\sin^2 2y=m \end{cases}$ سیستم د m کومو قیمتونو ته ځواب لري؟

888 **مثال)** له $\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ \cos 2x+\cos 2y=1 \end{cases}$ سیستم څخه د $\cos y$ قیمت ترلاسه کړئ؟

889 **مثال)** که $\begin{cases} \tan x+\tan y=2\sqrt{2} \\ \cot x+\cot y=2\sqrt{2} \end{cases}$ وي $\tan x$ ترلاسه کړئ.

890 **مثال)** په $\begin{cases} \cos(x-y)+\cos(x+y)=\dfrac{2}{3} \\ \tan x+\tan y=3 \end{cases}$ سیستم کې د $x+y$ حاصل ترلاسه کړئ.

891 **مثال)** په لاندې سیستم کې $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \cos^2 x-\sin^2 y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$, $x+y$ ترلاسه کړئ.

892 **مثال)** که $\begin{cases} \cos(x+y)+\cos(x-y)=1 \\ \cos x=3\cos y \end{cases}$ وي په $[0,2\pi]$ واټن کې د x لپاره څو ځوابونه موجود دي؟

893 **مثال)** $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{4} \\ \sin 2x+\cos 2y=k \end{cases}$ سیستم د k کوم قیمت ته ځواب لري؟

894 **مثال)** $\begin{cases} \tan x+\tan y=k \\ \cot x+\cot y=k \end{cases}$ سیستم د k کومو قیمتونو ته ځواب لري؟

895 **مثال)** که $\begin{cases} \tan x=3\cot y \\ \tan x+\tan y=2\sqrt{3} \end{cases}$ وي په $[0,2\pi]$ واټن کې د x لپاره څو ځوابونه موجود دي؟

مثال) لاندې سیستمونه حل کړئ.

896) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{4} \\ \sin 2x+\sin 2y=k \end{cases}$ 897) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{6} \\ \sin^2 2x-\sin^2 2y=m \end{cases}$

898) $\begin{cases} \sin(x-y)+\cos(x-y)=\sqrt{2} \\ \dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}=\dfrac{k-1}{k+1}\ ;\ 0<x,y<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 899) $\begin{cases} x-y=30^\circ \\ \tan x\cdot\tan y=m \end{cases}$

900) $\begin{cases} x-y=\theta \\ \cot x-\cot y=3m \end{cases}$ 901) $\begin{cases} \tan x\cdot\tan y=2 \\ \cos 2x+\cos 2y=m \end{cases}$

902) $\begin{cases} x+y=2\alpha \\ \sin x\cdot\sin y=m\sin\alpha\cdot\cos\alpha \end{cases}$

903) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3} \\ \sin^2 x+\sin^2 y-k\sin x\cdot\sin y=0 \end{cases}$

904) $\begin{cases} \sin x=\tan\alpha\cdot\sin(y+\alpha) \\ \sin(\alpha-x)=2\sin^2\dfrac{y}{2}+\cos(y+2\alpha) \end{cases}$

18. د مثلث د اجزاوو ترمنځ اړیکې

18 – 1) په مثلث کې د زاویو ترمنځ اړیکې

$$if\ \ A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(A+B)=\sin(\pi-C) \Rightarrow \sin(A+B)=\sin C \\ \cos(A+B)=\cos(\pi-C) \Rightarrow \cos(A+B)=-\cos C \\ \tan(A+B)=\tan(\pi-C) \Rightarrow \tan(A+B)=-\tan C \\ \cot(A+B)=\cot(\pi-C) \Rightarrow \cot(A+B)=-\cot C \end{cases}$$

$$if\ \ A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2} \\ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2} \\ \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2} \\ \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \cot\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\frac{C}{2} \end{cases}$$

یادونه

په کلاسیک حالت کې د مثلث حل

په کلاسیک حالت کې د مثلث حل، یعنې په مثلث کې د اصلي اجزاوو ټاکل. هر مثلث شپږ اصلي جز لري، چې هماغه درې ضلعې او درې زاویې ګڼل کیږي، چې په دې ډول مسئلو کې له شپږو اجزاوو څخه درې جز ورکول کیږي.

په کلاسیک حالت کې درې مسئلې موجودې دي:

1) د مثلث درې ضلعې معلومې دي او غواړو مثلث حل کړو(باید درې زاویې یې وټاکو).

2) د مثلث دوې ضلعې او یوه زاویه معلومه ده او غواړو مثلث حل کړو(باید یوه ضلع او دوې زاویې یې وټاکو).

3) د مثلث یوه ضلع او دوې زاویې معلومې دي، غواړو مثلث حل کړو(باید دوې نورې ضلعې او یوه زاویه یې وټاکو).

په غیر کلاسیک حالت کې د مثلث حل

په غیر کلاسیک حالت کې د مثلث حل، یعنې په مثلث کې د فرعي اجزاوو ټاکل، فرعي اجزا عبارت دي له:

ارتفاع، ناصف، میانې(وسط)، مساحت، د محاطي ننۍ او بهرنۍ شعاعوې او دې ته ورته نور اجزاو څخه.

مثال) ثبوت کړئ چې په هر قایم الزاویه مثلث کې لاندې رابطې صدق کوي: $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$.

905) $\cos(B-C)=\dfrac{2bc}{a^2}$

906) $\sin^2 B-\sin^2 C=\dfrac{b^2-c^2}{a^2}$

907) $\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$

908) $\tan 2B=\dfrac{2bc}{c^2-b^2}$

909) $\sin(B-C)=1-2\left(\dfrac{c}{a}\right)^2$

910) $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{b}{a+c}$

911) $\dfrac{\cos B+\cos C+\cos\dfrac{B+C}{2}}{\sin B+\sin C+\sin\dfrac{B+C}{2}}=1\ ,\ \hat{A}=90^\circ$

912) $\dfrac{1+\cos 2C}{\sin 2B}=\cot C\ ,\ \hat{A}=90^\circ$ 913) $\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2C}=\dfrac{c}{b}$

914) $c^2+a^2\sin(B-C)=b^2$

915) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

916) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}$

917) $2a^2\cos^2\dfrac{B-C}{2}=(b+c)^2\quad,\quad\hat{A}=90^\circ$

918 **مثال)** په قايم الزاويه مثلث کې A راس ته کوم يو لاندينی ځواب سم دي؟

(1 $b^2=a^2+c^2$ (2 $a^3=b^3+c^3$

(3 $a^3<b^3+c^3$ (4 هيڅ يو هم

919 **مثال)** که α او β او γ د مثلث زاويې وي، $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\dfrac{\pi^2}{3}$ نامساوات ثبوت کړئ.

920 **مثال)** په ABC قايم الزاويه مثلث کې که c د مثلث وتر وي، $(a+b)\leq c\sqrt{2}$ نامساوات ثبوت کړئ.

921 **مثال)** که په ABC مثلث کې $\cos\theta(\sin B+\sin C)=\sin A$ رابطه صدق وکړي، ثبوت کړئ چې $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan\dfrac{\mathrm{B}}{2}\cdot\tan\dfrac{\mathrm{C}}{2}$ دی.

922 **مثال)** په $ABC\ (\angle A=90^\circ)$ قايم الزاويه مثلث کې مو A رسم کړی ترڅو BC وتر په D نقطه کې قطع کړي، ثبوت کړئ چې:

$CD=BD\tan B$

923 **مثال)** په O مرکز لرونکې دايره کې، دوه يو پر بل عمود AA' او BB' قطرونه رسموو، AD وتر BB' قطر په C نقطه(د O او B ترمنځ) قطع کوي، $\angle DAA'=x$ زاويې داسې ترلاسه کړئ چې $(OA=R)$ وي.

1) $CO=DC$

2) $CD=DA'$

924 **مثال)** O مرکز او R شعاع لرونکې دايره فرضوو، د دايرې له بهرنۍ نقطې يعنې A څخه په $OA=2R$ اندازه ABC قاطع رسموو او د BC وتر منځ(وسط) H نقطه ټاکو، $\angle OAB=x$ داسې ټاکو چې د AH او OH بعُد لرونکي مستطيل مساحت m ځله د BH ضلع لرونکې مربع له مساحت څخه ستر وي.

925 **مثال)** د $R=1$ شعاع لرونکې دایرې OAB ربع فرضوو، ددې دایرې پرمحیط پرتې M نقطې څخه، په دایره مماس رسموو، ترڅو د OA او OB امتداد په C او D نقطو کې قطع کړي، د $\angle MOA = x$ په فرضولو سره، x داسې وټاکئ ترڅو $OC+OD=2\sqrt{6}$ شي.

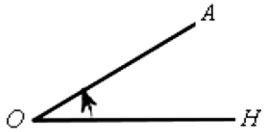
926 **مثال)** په هغه دایره کې چې شعاع يې R وي $\angle AOB = 120°$ فرضوو. له m اختیاري نقطې څخه مماس پرې رسموو، ترڅو OA او OB امتداد په E او F نقطو کې قطع کړي، $\angle AOM = x$ داسې وټاکئ چې $EF = \left(3+\sqrt{3}\right)R$ وي.

927 **مثال)** xoy قایم زاویه فرضوو، د ox پرمخ،$OA=1$, $OB=\sqrt{2}+1$ طولونه بیلوو، د y پرمخ C ته ورته نقطه داسې ترلاسه کړئ چې $\angle ABC = 2\angle ACB$ شي.

یادونه-

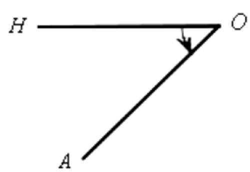
لوړه زاویه

که د لیدونکي سترګې په O نقطه کې وي او A نقطې ته وګوري، OA خط چې د افقي سطحې سره کومه زاویه جوړوي، هغه زاویې ته لوړه زاویه وایي. لوړه زاویه د افقي سطحې پر سر ده.



ټیټه زاویه

که د لیدونکې سترګې په O نقطه کې وي او A نقطې ته ورګوري، OA خط چې د افقي سطحې سره کومه زاویه جوړوي، هغه زاویې ته ټیټه زاویه وایي. ټیټه زاویه د افقي سطحې تر لاندې ده.



928 **مثال)** د ځمکې پرمخ O نقطې څخه د یوه برج لوړه زاویه $27°$ ده، که چېرې د O نقطې او برج د بیخ ترمنځ واټن $16.7m$ وي، د برج لوړوالی څو متره دی؟

929 **مثال)** له دوو A او B نقطو څخه په غونډۍ ولاړ بیرغ له پایې سره، د بیرغ لوړه زاویه په ترتیب $48°, 63°$ ده (د دوو A او B نقطو په امتداد ده)، د دوو A او B نقطو واټن چې د غونډۍ دواړو خواوو او ځمکې پرمخ موقعیت لري $74.5m$ ده، د بیرغ ارتفاع څومره ده؟

930 **مثال)** یو لیدونکی د سیند ترڅنګ ولاړ دی، د لیدونکي او د سیند غاړې ترمنځ 1.67 متره ارتفاع ده، د سیند بلې خوا ته ټیټه زاویه $22°$ ده، د سیند عرض څومره دی؟

931 **مثال)** د يوه برج راس له A نقطې څخه په 20° زاويه ليدل کيږي، برج لور ته د $80m$ افقي حرکت سره، لوړه زاويه 40° کيږي، د برج ارتفاع څومره ده؟

932 **مثال)** د يوې ودانۍ ارتفاع $24m$ ده، د ځمکې له سطحې څخه په $1.45m$ واټن کې له کومې نقطې څخه د ودانۍ د راس لوړه زاويه 23° کيږي.
$(\cot 23^\circ = 2.355)$

933 **مثال)** يوه هليکوپټر په $117.8m$ ارتفاع پرواز کوي، په يوه لمحه کې د دوو کښتيو چې دهليکوپټر دواړو خواوو ته دي او د افق سطحې په نسبت په يوه قايم صفحه کې واقع دي، ټيټې زاويې يې 43° او 36° دي، د دوو کښتيو ترمنځ واټن څومره ده؟

934 **مثال)** د ځمکې پرمخ د دوو A او B نقطو (چې ترمنځ يې $190m$ واټن دی) څخه د يوه برج د راس لوړې زاويې 75° او 40° دي، که دوې A او B نقطې د H نقطې يعنې د برج له بيخ سره قايم الزاويه مثلث جوړ کړي، د برج ارتفاع محاسبه کړئ.
$\cot 75^\circ = 0.267 \quad , \quad \cot 40^\circ = 1.191$

935 **مثال)** AB قطر لرونکې نيم دايره راکړل شوې، له A نقطې څخه AC وتر رسموو او امتداد ورکوو، تر څو مماس B نقطه په D نقطه کې قطع کړي، که چېرې $AD = 4AC$ وي، $B\widehat{A}D$ زاويه محاسبه کړئ.

936 **مثال)** دوه بهر مماس دايرې راکړل شوي، که چېرې د يوې دايرې شعاع د بلې يوې د شعاع درې چنده وي، نو د بهر ګډ مماسونو ترمنځ يې زاويه وټاکئ.

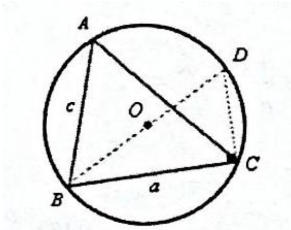
937 **مثال)** له A او B نقطو څخه چې د يوې ودانۍ په يوه خوا کې پرتې دي، د ودانۍ د سر، لوړې زاويې α او β دي، که $AB = L$ وي د ودانۍ ارتفاع محاسبه کړئ؟

938 **مثال)** له A نقطې څخه چې د يوه برج له لاندې څخه $10m$ واټن لري، د يوه بيرغ د پيل او پای زاويه 30° او 60° ده، د برج ارتفاع محاسبه کړئ.

939 **مثال)** له دوو A او B نقطو څخه چې د يوې ونې په دوو خواوو او د بلې ونې په پای کې دي، د ونې د سر لوړه زاويه په ترتيب α او β ده، په دې صورت کې د ونې ارتفاع د α او β او AB له جنسه څومره ده؟

2 – 18) د مثلث د اضلاع او ساين ترمنځ رابطه

ABC غير مشخص مثلث فرضوو، محيطي دايره يې رسمو او BD قطر هم چې له O مرکزه تېريږي رسموو، وروسته بيا D له C سره نښلوو.



R د مثلث د محیطي دایرې شعاع ده.

$$\Delta DBC : \sin \widehat{D} = \frac{BC}{BD} => \sin \widehat{D} = \frac{a}{2R}$$

$$\widehat{A} = \widehat{D} => \sin \widehat{A} = \sin \widehat{D} => \sin \widehat{A} = \frac{a}{2R} => 2R = \frac{a}{\sin A}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R => \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

940 **مثال)** په ABC مثلث کې که $BC = a = 5\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ او $B = 60°$ او $\hat{A} = 75°$ وي، $\hat{C}$ زاویه او AB او AC اضلاعوې او د محیطي دایرې شعاع محاسبه کړئ.

941 **مثال)** په ABC مثلث کې لرو چې: $\hat{B} = 120°$, $AB = \sqrt{3} - 1$, $AC = \sqrt{6}$ ، دی، A او C زاویې، BC ضلع او دمثلث محیطي دایرې شعاع محاسبه کړئ.

942 **مثال)** په لاندې مثلث کې $R = 2 , ABC$ او $AC = 2\sqrt{3}$ او $AB = 2\sqrt{2}$ دي، C , B , A زاویې محاسبه کړئ.

943 **مثال)** په ABC مثلث کې که $\hat{A} = 75°, AC = 10\sqrt{2} , R = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ وي، $BC , AB , \hat{C} , \hat{B}$ محاسبه کړئ.

944 **مثال)** په لاندې څلور ضلعي کې $AOBM$ $AO = 1$, $BO = \frac{2}{\sqrt{3}} , A\hat{O}B = \frac{\pi}{2} , A\hat{M}O = B\hat{M}O = \frac{\pi}{6}$ دي، AB , OM , BM , AM محاسبه کړئ.

945 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $c + b\sqrt{2} = 2a , \hat{B} = 60°$ دی.

لومړی) د $\hat{C} , \hat{A}$ څنډې(زاویې) محاسبه کړئ.

دویم) د $AB = 10\sqrt{2}$ په فرضولو سره د مثلث د دوو نورو اضلاعو طول محاسبه کړئ.

مثال) ثبوت کړئ چې په هر مثلث کې لاندې رابطې موجودې دي:

$$946) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos A + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\cos B + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos C = 3$$

947) $a\cdot\sin A+b\cdot\sin B+c\cdot\sin C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2R}$

948) $\dfrac{b-c}{a}\cdot\cos\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B-C}{2}$　　949) $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}=\dfrac{\sin(B-C)}{\sin A}$

950) $\dfrac{b^2-c^2}{a}=b\cos C-c\cos B$　　951) $\tan B=\dfrac{b\sin C}{a-b\cos C}$

952) $\dfrac{b-2a\cos C}{a\sin C}=\cot A-\cot C$　　953) $\dfrac{\cos B}{\cos C}=\dfrac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$

954) $\dfrac{1+\cos(A-B)\cdot\cos C}{1+\cos(A-C)\cdot\cos B}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$

955) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

956) $a^2\cdot\cos 2B+b^2\cdot\cos 2A=a^2+b^2-4ab\sin A\cdot\sin B$

957) $b\cdot\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right)+c\cdot\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)=4R$

958) $(b+c)\tan\dfrac{A}{2}=2R(\cos B+\cos C)$

959) $\dfrac{b-c}{b+c}=\tan\dfrac{B-C}{2}\cdot\tan\dfrac{A}{2}$

960 **مثال)** که چېرې په یوه مثلث کې $B-C=\dfrac{\pi}{2}$ وي، ثبوت کړئ چې $b=2R\cos C$ دی.

961 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b+c=2a$ وي، ثبوت کړئ چې $3\tan\dfrac{B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=1$ دی.

962 **مثال)** که P نقطه د ABC مثلث دننه داسې نقطه وي چې $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$ شي، ثبوت کړئ چې:

$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$

963 **مثال)** ثبوت کړئ که په مثلث کې $\cos A+\cos B=4\sin^2\dfrac{C}{2}$ وي، په هغه صورت کې اضلاع یې یو عددي تصاعد جوړوي.

964 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b+c=2a$ فرض شوی وي، پایله ترلاسه کړئ:

1) $\cot\dfrac{B}{2}\cdot\cot\dfrac{C}{2}=3$

2) $4(1-\cos B)(1-\cos C)=\cos B+\cos C$

965 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b-c=k$ وي A زاویه او a ضلع معلوم قیمتونه ولري، مثلث حل کړئ او ویې څېړئ.

966 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b+c=k$ او a معلوم وي پوهیږو چې $B=2C$ دی، نو مثلث حل کړئ او ویې څېړئ.

967 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $a=\sqrt{3}\left(b-c\right)$ او $A=60^\circ$ وي، B او C زاویې وټاکئ.

968 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $R=12$ او $\tan B\cdot\tan C=1$ وي د a ضلعې اندازه ترلاسه کړئ.

969 **مثال)** د $A=\dfrac{\pi}{3}$, $b=\sqrt{3}\,a$ معلوماتو په ذریعه څو مثلثونه ټاکل کیدلی شي؟

970 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $B=2C$ او $\dfrac{b}{c}\tan\dfrac{C}{2}=k\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$ وي، د مثلث زاویې وټاکئ او وڅېړئ.

971 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b\tan\dfrac{B}{2}+c\tan\dfrac{C}{2}=2R$ رابطه فرض شوې وي:

1) ترلاسه کړئ چې $\cos B+\cos C=1$ دی.

2) د A د معلوم والي په صورت کې او (1) رابطې څخه په استفادې سره B او C وټاکئ او وڅېړئ.

972 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $\hat{A}=120$ وي او $\dfrac{b-c}{2R}=k\cdot\cos\dfrac{B-C}{2}$ رابطه فرض شوي وي نو د B او C زاویې وټاکئ.

973 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $B=7C$ وي او $\dfrac{b-c}{b+c}=m\cdot\tan\dfrac{B-C}{2}$ رابطه صدق وکړي، نو یاده رابطه وڅېړئ.

مثال) هغه مثلث وټاکئ چې لاندې رابطې پکې صدق وکړي.

974) $\sin A+\cos A=\sin B+\cos B$ 975) $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

976) $a\cdot\tan A+b\cdot\tan B=\left(a+b\right)\tan\dfrac{A+B}{2}$

977) $\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{a+b}{c}$ 978) $a=2b\cos C$

979) $a^2\cot\dfrac{A}{2}=2bc\sin A$ 980) $\dfrac{b+c}{a}=\cos B+\cos C$

981) $\dfrac{b^2}{\tan B}+\dfrac{c^2}{\tan C}=2bc\sin A$

982) $\left(a^2+b^2\right)\sin\left(A-B\right)=\left(a^2-b^2\right)\sin\left(A+b\right)$

983) $b=2a\cos C$ 984) $\dfrac{a-2c\cos B}{b-2c\cos A}=1$

985) $a\cdot\cos A+b\cdot\cos B=\dfrac{abc}{2R^2}$ 986) $\dfrac{b}{c}\cdot\cot B+\dfrac{c}{b}\cdot\cot C=2\sin A$

987) $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C+\cos B\cdot\cos C=1$

988 **مثال)** P نقطه د AB ضلعې پرمخ داسې ده چې $\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n}$, $\angle CPB=\theta$ ، نو ثبوت کړئ چې:
$(m+n)\cot\theta = n\cos A - m\cot B$

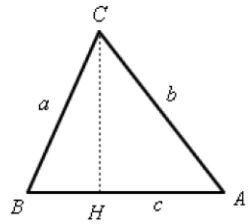
3 – 18) د مثلث د کوساین او اضلاعو ترمنځ رابطه

په ABC مثلث (نه ټاکل شوي مثلث) کې CH ارتفاع رسموو، د مسطح هندسې له مخې لرو چې:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c\times AH$$

$$\Delta\, AHC : \cos A = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \cos A = \frac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\cdot\cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c\times b\cos A \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



په دې اساس د مثلث د اضلاع او کوساین ترمنځ رابطې موجودې دي.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

که زاویه منفرجه وي، بیا هم پاسنۍ رابطې صدق کوي.

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وڅېړئ.

989) $\frac{c\cdot\sin(A-B)}{b\cdot\sin(C-A)} = \frac{a^2-b^2}{c^2-a^2}$ 990) $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$

991 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $\hat{B}=120^\circ$, $BC=2$, $AB=\sqrt{3}-1$ ولرو، لومړی AC طول محاسبه کړئ، وروسته بیا $\widehat{C},\widehat{A}$ زاویې ترلاسه کړئ.

992 **مثال)** په لاندې مثلث کې ABC , $BC=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $AC=2\sqrt{3}$, $AB=2\sqrt{2}$ دي، لومړی C زاویه محاسبه کړئ، وروسته بیا B,A زاویې ترلاسه کړئ.

993 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $\sin^3 A = \sin^3 B + \sin^3 C$ صدق وکړي ثبوت کړئ چې $\widehat{A} > 60^\circ$ ده.

994 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b^3+c^3=a^2(b+c)$ رابطه فرض شوې وي ثبوت کړئ چې $\hat{A}=60°$ ده.

995 **مثال)** که په غیر متساوي الساقین مثلث کې، $b(b^2-a^2)=c(c^2-a^2)$ رابطه موجوده وي $\widehat{A}$ ترلاسه کړئ.

996 **مثال)** که په یوه مثلث کې $\begin{cases} bc=3R^2 \\ \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2 \end{cases}$ رابطې صدق وکړي، ثبوت کړئ چې مثلث متساوي الاضلاع دی.

997 **مثال)** ABC مثلث حل کړئ، مشروط په دې چې $b=AC=2\sqrt{3}$, $a=BC=3\sqrt{2}$ او $c=AB=3+\sqrt{3}$ وي.

998 **مثال)** ABC مثلث حل کړئ که $A=60°$, $c=\sqrt{3}+1$, $b=2$ وي.

999 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b=a+1$, $c=a+2$, $\cos A=\dfrac{3}{5}$ وي a ترلاسه کړئ.

1000 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}-1$, $c=\sqrt{3}+1$ وي دمثلث زاويې وټاکئ.

1001 **مثال)** که $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ وي، $\widehat{A}$ زاويه څومره ده؟

1002 **مثال)** که $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$ وي، ثبوت کړئ چې $\widehat{C}$ زاويه مساوي په $60°$ یا $120°$ ده.

مثال) د راکړل شوو رابطو په پام کې نیولو سره، غوښتل شوې زاويې ترلاسه کړئ.

1003) $\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2$, $\hat{A}=?$

1004) $(b+c+a)(b+c-a)=3bc$, $\widehat{A}=?$

1005) $a(a^2-b^2)=c(c^2-b^2)$, $\widehat{B}=?$ (غیر متساوي الساقین مثلث)

1006) $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+b^4=0$, $\widehat{C}=?$

4 – 18) د مثلث د زاويې او محيط ترمنځ رابطه

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ رابطه موجوده ده.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{[2(p-a)](2p)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$$

$$if \quad a+b+c=2p \Rightarrow b+c=2p-a \Rightarrow b+c-a=2(p-a)$$

که په B او C زاويو پاسنيو عملياتو ته ورته عمليات ترسره کړو، نو وبه لرو چې:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc} \\ \cos^2\frac{B}{2}=\frac{p(p-b)}{ac} \\ \cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-c)}{ab} \end{cases}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow 1-2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-c)(p-b)}{bc}$$

$$if \quad a+b+c=2p \Rightarrow \begin{cases} a+b=2p-c \Rightarrow a+b-c=2p-2c \Rightarrow a+b-c=2(p-c) \\ a+c=2p-b \Rightarrow a-b+c=2p-2b \Rightarrow a-b+c=2(p-b) \end{cases}$$

که د B ، C زاويو لپاره پاسنيو عملياتو ته ورته عمليات ترسره شي، نو وبه لرو چې:

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\\ \sin^2\frac{B}{2}=\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\\ \sin^2\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\end{cases}$$

د بیان شوو فورمولونو په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan^2\frac{A}{2}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\\ \tan^2\frac{B}{2}=\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}\\ \tan^2\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}\end{cases}\qquad \Rightarrow\begin{cases}\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p}\\ \tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{p-b}{p}\\ \tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{p-a}{2}\end{cases}$$

مثال) د لاندې مساواتو سموالی وڅیړئ.

1007) $\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{k-1}{k+1}\quad,\quad b+c=ka\ ,k>1$

1008) $b\cdot\sin^2\frac{C}{2}+c\cdot\sin^2\frac{B}{2}=p-a$

1009) $a=p\left(1-\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\right)$

1010) $\dfrac{ab\cos^2\frac{c}{2}}{p(a+b-c)}=\dfrac{1}{2}$

11011 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b+c=3a$ وي، د $\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$ حاصل ترلاسه کړئ.

11012 **مثال)** په هغه مثلث کې چې c,b,a اضلاعو یو تصاعد جوړ کړی وي د $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$ افادې قیمت څومره دی؟

11013 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{3}{5}$ وي، په دې صورت کې $\sin B+\sin C$ ترلاسه کړئ.

11014 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $b=a+1$ او $c=a+2$ او $\cos A=\frac{3}{5}$، وي a او $\tan\frac{B}{2}$ او $\tan\frac{C}{2}$ محاسبه کړئ.

11015 **مثال)** هغه مثلث وټاکئ چې په هغه کې لاندې رابطې موجودې وي.

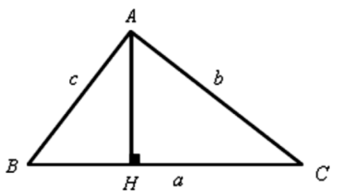
$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A+\sin C}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

18 – 5) د مثلث د دريو اضلاعو او دوو زاويو ترمنځ رابطه

په ABC مثلث کې AH ارتفاع رسموو:

$$\Delta\, ABH:\cos B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\cos B=\frac{BH}{c}\Rightarrow BH=c\cdot\cos B$$

$$\Delta\, AHC:\cos C=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\cos C=\frac{HC}{b}\Rightarrow HC=b\cdot\cos C$$



د پاسنيو مساواتو دواړه خواوې له يوه بل سره جمع کوو:

$$BH+HC=c\cdot\cos B+b\cdot\cos C\Rightarrow BC=c\cdot\cos B+b\cdot\cos C$$
$$\Rightarrow a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$$

په همدې توګه به ولرو چې:

$$\Rightarrow\begin{cases}a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B\\ b=a\cdot\cos C+c\cdot\cos A\\ c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A\end{cases}$$

مثال) دلاندې مساواتو سموالی وڅېړئ.

1016) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$

1017) $b\cdot\cos^2\frac{A}{2}+a\cdot\cos^2\frac{B}{2}=p$

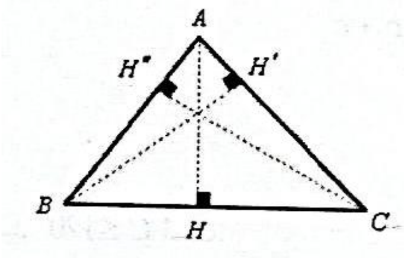
1018**مثال)** په هغه مثلث کې چې $A=3B$, $a=2b$, $c\cdot\cos B+b\cdot\cos C=6$ وي، د مثلث زاويې او اضلاعوې محاسبه کړئ.

6 – 18) د مثلث د ارتفاع ګانو محاسبه

په ABC مثلث کې:

$$AH = h_a \ , \ BH' = h_b \ , \ CH'' = h_c$$

$$\Delta ABH : \sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin B = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \sin B$$



له دې ځایه لرو:

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a = c \cdot \sin B = b \cdot \sin C = 2R \sin B \sin C = \dfrac{a \sin B \cdot \sin C}{\sin A} \\ h_b = a \cdot \sin C = c \cdot \sin A = 2R \sin A \sin C = \dfrac{b \sin A \cdot \sin C}{\sin B} \\ h_c = b \cdot \sin A = a \cdot \sin B = 2R \sin A \sin B = \dfrac{c \sin A \cdot \sin B}{\sin C} \end{cases}$$

1019 **مثال)** په یوه مثلث کې $\hat{B} = 3\hat{C}$ ده، او د ارتفاعو ترمنځ یې $\sqrt{2}\dfrac{h_b}{h_c} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sin\frac{A}{2}}$ رابطه موجوده ده، زاویې ترلاسه کړئ.

1020 **مثال)** په یوه مثلث کې $h_a^2 = h_b \cdot h_c$ فرض شوې.

1) ثبوت کړئ چې $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$ دی.

2) که چېرې A زاویه معلومه وي C, B زاویې وټاکئ او ویې څېړئ.

1021 **مثال)** که په یوه مثلث کې $B = 3C$ او $\dfrac{1}{a}(b\cos C - c\cos B)\sin^2 A = k\dfrac{h_c}{h_a}\cos C$ رابطه صدق وکړي.

1) وڅېړئ چې $\sin 2C \cdot \sin C = k\cos C$ دی.

2) (1) معادله حل او وڅېړئ.

1022 **مثال)** په یوه مثلث کې $B = 3C$ او $\dfrac{h_b - h_c}{c-b} = k \cdot \tan 2C$ رابطه فرض شوې.

1) پایله تر لاسه کړئ چې $(1)\sin 4C = k \cdot \tan 2C$ وي.

2) د C زاویې د حد په پام کې نیولو سره (1) معادله وڅېړئ.

1023 **مثال)** هغه مثلث وټاکئ چې پکې لاندې رابطې صدق وکړي.

1023) $h_c - h_b = a\sqrt{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$

1024) $h_b + h_c = b + c$

1025 **مثال)** د لاندې رابطې په پام کې نيولو سره $h_b + h_c = \dfrac{b+c}{2}$, $\hat{A}$ ترلاسه کړئ.

1026 **مثال)** که h په c ضلع وارد شوې ارتفاع او $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{h}$ وي، په دې صورت کې ثبوت کړئ چې $\hat{C} \le 120°$ ده.

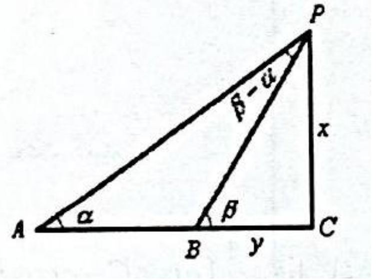
يادونه – (د هغه نقطې د ارتفاع ټاکل چې لاسرسی نه ورته کيږي)

فرضوو چې A او B نقطې چې په افقي سطح پرتې دي، د P نقطې سره چې لاسرسی نه ورته کيږي په يوه قايم سطحه کې پرتې وي او له P نقطې څخه د A او B لوړې زاويې په ترتيب β,α وي.

غواړو چې PC يعنې د P نقطې ارتفاع محاسبه کړو، $AB = a$ د اندازه نيونې وړ دی او فرضوو چې $BC = y$, $PC = x$ وي.

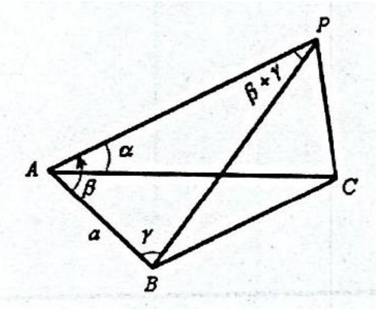
ښکاره ده چې په APB مثلث کې د ساين فورمولونه عبارت دي له:

$$=>\begin{cases} \dfrac{PB}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin(\beta-\alpha)} => PB = \dfrac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \\ PC = x = PB\sin\beta => x = \dfrac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \end{cases}$$



که A , B د P نقطې سره (چې لاسرسی نه ورته کيږي) په يوه قايم صفحه کې نه وي پرتې د $AB = a$ ، $P\hat{A}C = a$, $B\hat{A}P = \beta$, $A\hat{B}P = \gamma$ په درلودلو سره کولی شو PC ارتفاع محاسبه کړو.

$$=>\begin{cases} \Delta APB : \dfrac{AP}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin(\beta+\gamma)} => AP = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} \\ \Delta PAC : PC = PA\sin\alpha => PC = \dfrac{a\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)} \end{cases}$$



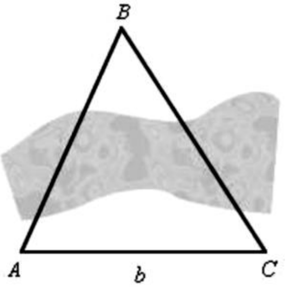
18 – 7) د هغه دوو نقطو ترمنځ دواټن اندازه چې ترمنځ يې خنډ پروت وي

فرضوو چې د دوو A او B نقطو ترمنځ داسې خنډ پروت وي چې ونشو کولی څو AB اندازه کړو، خو د C ته ورته نقطې په ټاکلو سره وکولی شو AC اندازه کړو $(AC = b)$. د تيودوليت ته ورتـه وسـيلو په ذريعه کولی شو د ABC مثلث C, A څنډه اندازه کړو.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad , \quad \hat{B} = \pi - \left(\hat{A} + \hat{C}\right)$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{b}{\sin\left[\pi - \left(A + C\right)\right]} \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{b}{\sin\left(A + C\right)}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{b\sin C}{\sin\left(A + C\right)}$$



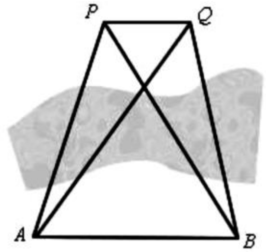
18 – 8) د هغه دوو نقطو دواټن محاسبه چې ز موږ څخه لرې دي

فرضوو چې Q, P نقطې د سيند په يوه غاړه کې وي او موږ د سـيند پـه بلـه غـاړه يـو او نشـو کـولی لـه سينده تېر شو.

د سيند په کومه غاړه چې موږ ولاړ يو دوې B, A نقطې داسې ټاکو چې Q, P, B, A پـه يـوه سـطحه کې واقع وي.

فرضـوو چـې $PB\hat{Q} = \beta'$, $P\hat{B}A = \beta$, $Q\hat{A}B = \alpha$, $P\hat{A}Q = \alpha'$, $AB = a$ وي، ښـکاره ده چې د تيودوليت په ذريعه کولی شو $\beta', \beta, \alpha', \alpha$ په دقيق ډول وټاکو.

$$=>\begin{cases}\Delta PAB : PA = \dfrac{a\sin B}{\sin(\alpha+\alpha'+\beta)}\\ \Delta QAB : QA = \dfrac{a\sin(\beta+\beta')}{\sin(\alpha+\beta+\beta')}\end{cases}$$



له دې چې په PAQ مثلث کې دوې QA, PA ضلعې او ترمنځ يې α' زاويه معلومه ده، په دې اساس کولی شو PQ محاسبه کړو.

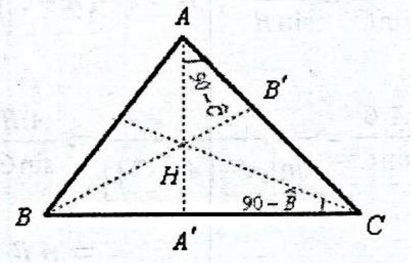
18 – 9) له اړونده ضلعو او راسونو څخه د مثلث د دريو ارتفاع ګانو د تقاطع نقطې واټن

فرضوو چې H د ABC مثلث د دريو ارتفاعو د يوځای کېدو نقطه وي.

په $HA'C$ قايم الزاويه مثلث کې چې يوه زاويه يې $(90° - B)$ ده، لرو چې:

$$\Delta HA'C : \frac{HA'}{A'C} = \tan(90° - B) => \frac{HA'}{A'C} = \cot B => HA' = A'c \cdot \cot B$$

$$\Delta AA'C : \frac{A'C}{AC} = \sin(90° - C) => \frac{A'C}{AC} = \cos C => A'C = AC \cdot \cos C$$



$$AC = 2R\sin B => A'C = 2R\sin B\cos C \quad ; \quad A'C = AC \cdot \cos C$$

$$=> HA' = 2R\sin B\cos C \cdot \cot B \quad ; \quad HA' = A'C\cot B$$

$$=> HA' = 2R\sin B\cos C\frac{\cos B}{\sin B}$$

$$=> HA' = 2R\cos B \cdot \cos C$$

$$=>\begin{cases}HA' = 2R\cos B \cdot \cos C\\ HB' = 2R\cos C \cdot \cos A\\ HC' = 2R\cos A \cdot \cos B\end{cases}$$

$$HA = AA' - HA'$$

$$= 2R\sin B \cdot \sin C - 2R\sin\cos B \cdot \cos C$$
$$= -2R\cos(B+C)$$
$$= 2R\cos A$$

$$=> \begin{cases} HA = 2R\cos A \\ HB = 2R\cos B \\ HC = 2R\cos C \end{cases}$$

10 – 18) د مثلث د مساحت محاسبه

د هر مثلث مساحت له (قاعده × د ارتفاع نیمايي) فورمل څخه په لاندې توګه محاسبه کیږي:

$$=> \begin{cases} s = \frac{1}{2}a \cdot h_a \\ h_a = b\sin C \end{cases} \Bigg\rangle S = \frac{1}{2}a \cdot b\sin C = \frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$$

$$=> S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

په همدې توګه:

$$=> S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A} = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2\sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin C}$$

$$if \ \ \frac{a}{\sin A} = 2R => \begin{cases} \frac{abc}{bc\sin A} = 2R \\ S = \frac{1}{2}bc\sin A \end{cases} \Bigg\rangle \frac{abc}{2S} = 2R => S = \frac{abc}{4R}$$

مثال) دلاندې مساواتو سموالی وښیئ.

1027) $2R\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \frac{S}{R}$

1028) $\frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin(A-B)} = S$

1029 **مثال)** ثبوت کړئ چې:

لومړی) – په هر مثلث کې $\frac{a^2}{2S} = \cot B + \cot C$ رابطه صدق کوي.

دویم)- هغه مثلث وټاکئ چې پکې $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \cot B + \cot C$ رابطه صدق وکړي.

1030 **مثال)** په هغه مثلث کې چې $h_a = \frac{2S}{a} \cdot \cos\frac{B-C}{2}$ فرض شوې وي:

1) ثبوت کړئ چې $B = C$ دی.

2) د مثلث مساحت د a او $\frac{A}{2}$ له جنسه ترلاسه کړئ.

3) له $S = \dfrac{a^2(2-\sqrt{3})}{4}$ رابطې څخه يې زاويې ترلاسه کړئ.

1031**مثال)** که H د $AH = x$, $BH = y$, $CH = z$ ارتفاع ګانو د تقاطع نقطه وي، ثبوت کړئ چې:

$$x\sin A + y\sin B + z\sin C = 4R\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

1032**مثال)** په هغه مثلث کې چې $S = 12\left(3-\sqrt{3}\right)$ او $a = 12$, $B - C = 30°$ وي، د مثلث زاويې او اضلاعوې محاسبه کړئ.

مثال) هغه مثلث وټاکئ چې پکې لاندې رابطې صدق وکړي.

1033) $4S = a^2\cot\dfrac{A}{2}$

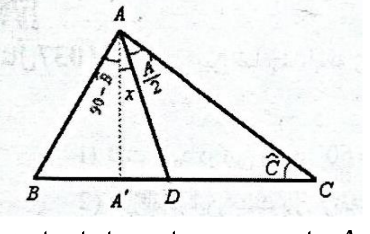
1034) $a\cdot\cos(B-C) = \dfrac{2S}{R}$

1035**مثال)** د $2p$ ثابت محيط لرونکو مثلثونو له ډلې، د کوم مثلث مساحت مکزيمم دی؟

1036**مثال)** ثبوت کړئ چې د يوه مثلث مساحت، د اضلاعو د مربعاتو له يوې شپږمې برخې څخه وړو دي.

11 – 18) د داخلي ناصفونو د طول محاسبه

فرضوو چې AD د A زاويې داخلي (ننۍ) ناصف وي، د AD ناصف طول d_a نوموو.



که چېرې په ABC مثلث کې د A زاويې د ننۍ ناصف او ارتفاع ترمنځ زاويه، مساوي په x فرض کړو، نو وبه لرو چې:

$$if\quad \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180° \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2} = 90°$$

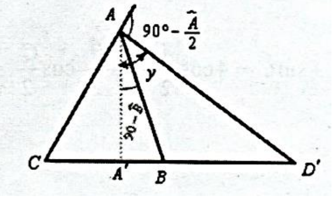
$$\frac{\hat{A}}{2} + x + \left(90-\hat{B}\right) = \hat{A} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + x + \left(\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}-\hat{B}\right) = \hat{A} \Rightarrow x = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$

$$\Delta\, AA'D : \cos x = \frac{AA'}{AD} \Rightarrow \cos x = \frac{h_a}{d_a} \Rightarrow \cos\frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{d_a} \Rightarrow d_a = \frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}}\ ,$$

$$
,\begin{cases} d_b = \dfrac{h_b}{\cos\dfrac{A-C}{2}} \\ d_c = \dfrac{h_c}{\cos\dfrac{A-B}{2}} \end{cases}
$$

12 – 18) د بهرنيو ناصفونو د طول محاسبه

هغه حالت په پام کې نيسو چې $\hat{B} > \hat{C}$ وي.



په ABC مثلث کې، د A زاويې بهرنۍ ناصف رسموو (AD').

د AD' طول په d'_a ښيو. که y د AA' ارتفاع او AD' د بهرني ناصف ترمنځ زاويه وي، نو وبه لرو چې:

$$
y = 90° - \hat{B} + 90° - \frac{\hat{A}}{2} => y = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} - B + 90° - \frac{\hat{A}}{2} => y = 90° - \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}
$$

$$
\Delta AA'D': \frac{AA'}{AD'} = \cos y => \frac{h_a}{d'_a} = \cos\left(90° - \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) => \frac{h_a}{d'_a} = \sin\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}
$$

$$
=> d'_a = \frac{h_a}{\left|\sin\dfrac{B-C}{2}\right|} \quad , \quad \begin{cases} d'_b = \dfrac{h_b}{\left|\sin\dfrac{A-C}{2}\right|} \\ d'_c = \dfrac{h_c}{\left|\sin\dfrac{A-B}{2}\right|} \end{cases}
$$

1037 **مثال)** په مثلث کې د اضلاعو ترمنځ لاندې رابطه موجوده ده:

$$
b^3 + c^3 = a^2(b+c)
$$

1) ثبوت کړئ چې په دې مثلث کې $\hat{A} = 60°$ دی.

2) که چېرې په دغه مثلث کې د $\hat{A}$ بهرني او نني ناصف او ارتفاع ترمنځ $4h_a^2 = d_a \times d'_a$ رابطه موجوده وي، C, B زاويې محاسبه کوو. $(\hat{B} > \hat{C})$

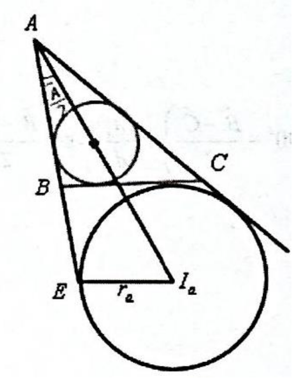
13 – 18) د محيطي دايرې د شعاع او مثلثاتي نسبتونو له جنسه د مثلث د محيط محاسبه

که د مثلث محيط $2p$ فرض کړو:

$$2p = a+b+c \Rightarrow 2p = 2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C$$
$$\Rightarrow p = R(\sin A + \sin B + \sin C)\ ;$$
$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\Rightarrow p = 4R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

14 – 18) د داخلي او بهرني محاطي دايرې د شعاع محاسبه

معمولا په هندسه کې د نني محاطي دايرې د شعاع طول په r ښيي، د زاويې دمثلثاتي خطونو او R له جنسه د r د محاسبه کولو لپاره له $S = pr$ فورمول څخه کار اخلو:



$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$
$$\Rightarrow r = \frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{4R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$
$$\Rightarrow r = \frac{2R^2\cdot\left(2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\right)\cdot\left(2\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\right)\cdot\left(2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\right)}{4R\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$
$$\Rightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

د بهرنۍ محاطي دايرې شعاع په لاندې توګه محاسبه کوو:

په ABC مثلث کې که I_a نظر A راس ته د بهرني محاطي دايرې مرکز وي او د دې دايرې د شعاع طول r_a فرض شوی وي، نو په AEI_a قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\frac{r_a}{AE} = \tan\frac{A}{2}$$

له پاسني مساواتو څخه لاندې رابطې ترلاسه کوو:

$$=> \begin{cases} r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \\ r_b = 4R\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \\ r_c = 4R\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} \end{cases}$$

1038 **مثال)** ثبوت کړئ چې په هر نامساوي مثلث کې $p^2 \geq 27r^2$ صدق کوي.

1039 **مثال)** دمتساوي الساقین مثلث زاویې داسې وټاکئ چې $\frac{r}{R}$ نسبت یې ترټولو لوړممکن قیمت وي.

1040 **مثال)** په مثلث کې لاندې رابطې فرض شوې:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r} = \frac{k}{2a}$$

1) د $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ په فرضولو سره پایله ترلاسه کړئ چې، $8\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} = k\sin B\sin C$ دی.

2) د (1) رابطې په مرسته د $\cos\frac{A}{2}$ له جنسه دویمه درجه معادله جوړه کړئ او C, B زاویې یې وټاکئ.

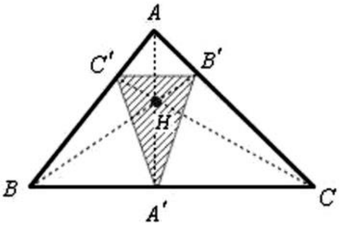
3) مسئله وڅېړئ او د k حدود د α له جنسه وټاکئ.

4) د $k = 8\sqrt{6}$, $\alpha = 60°$ لپاره زاویې ترلاسه کړئ.

15 – 18) ارتفاعیه مثلث

هغه مثلث چې راس یې د ABC مثلث د ارتفاع ګانو پای وي، ارتفاعه مثلث نومیږي.

په لاندې شکل کې AA' , BB' , CC' د ABC مثلث ارتفاع ګانې دي، مخکې مو د HC, HB, HA طول او د HC', HB', HA' طول محاسبه کړ.



1) د ABC ، مثلث ارتفاع ګانې د ارتفاعیه مثلث د زاویو داخلي ناصفونه دي.

2) د ارتفاعيه مثلث د محيطي دايرې شعاع د ABC مثلث د محيطي دايرې د شعاع نيمايي دی.

3) $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$

4) $A\hat{H}B = \pi - \hat{C}$, $A\hat{H}C = \pi - \hat{B}$, $B\hat{H}C = \pi - \hat{A}$

5) د AHB , AHC , BHC مثلثونو محيطي دايره، د ABC مثلث له محيطې دايرې سره مساوي ده.

6) د H متناظر نسبت هرې ضلعې ته، د ABC مثلث د محيطي دايرې پرمخ پروت دی.

7) د ABC مثلث اضلاعوې د ارتفاعيه مثلث بهرني ناصفونه دي.

8) د ارتفاعيه مثلث محيطي دايره د HC, HB, HA له منځه تېرېږي.

9) د ارتفاعيه مثلث زاويې مساوي دي په: $\pi - 2\hat{A}$, $\pi - 2\hat{B}$, $\pi - 2\hat{C}$.

10) $A'B' = R\sin 2C$, $A'C' = R\sin 2B$, $B'C' = R\sin 2A$

16 – 18) بهر مرکزي مثلث

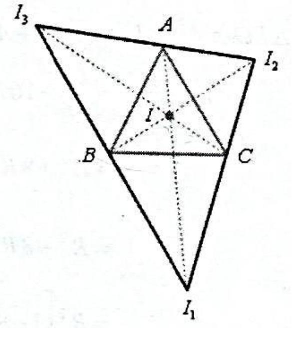
که I_1, I_2, I_3 په ترتيب نظر د ABC مثلث A, B, C راسونو ته د بهرنۍ محاطي دايرې مرکزونه وي، مثلث د بهر مرکزي مثلث پنامه يادېږي.

که I د ABC مثلث د دريو ناصفونو د يوځای کېدو ځای وي، AII_1 , BII_2 , CII_3 به مستقيم خطونه وي.

ضمنا I_2AI_3 , I_3BI_1 , I_1CI_2 هم مستقيم خطونه دي، چې درې لومړي خطونه په دريو وروستيو خطونو عمود دي.

ABC مثلث د $I_1I_2I_3$ بهر مرکزي مثلث لپاره، ارتفاعيه مثلث دی.

$B\hat{A}C = 180° - 2I_3\hat{I}_1I_2$



$$=> \begin{cases} I_3\hat{I}_1I_2 = 90° - \dfrac{\hat{A}}{2} \\ I_1\hat{I}_2I_3 = 90° - \dfrac{\hat{B}}{2} \\ I_2\hat{I}_3I_1 = 90° - \dfrac{\hat{C}}{2} \end{cases} \qquad => \begin{cases} I_2I_3 = 4R\cos\dfrac{A}{2} \\ I_3I_1 = 4R\cos\dfrac{B}{2} \\ I_1I_2 = 4R\cos\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

یادونه- (د بهر مرکزي مثلث مساحت)

$$\text{سطح}: I_1I_2I_3 = \frac{1}{2}I_1I_3 \times I_1I_2 \sin I_3\hat{I}_1I_2 = \frac{1}{2}\times 16R^2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$

$$\text{سطح}: I_1I_2I_3 = 8R^2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

د بهر مرکزي مثلث د محیطي دایرې شعاع، د ABC مثلث د محیطي دایرې د شعاع له دوه چنده سره مساوي ده.

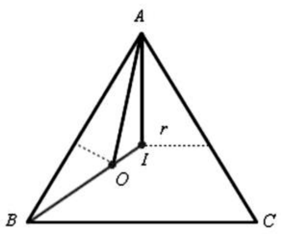
17 – 18) د محیطي دایرې او محاطي دایرې د مراکزو ترمنځ واټن

فرضوو چې O د محیطي دایرې مرکز وي او I د ABC مثلث د داخلي محاطي دایرې مرکز وي، داسې لکه شکل کې چې لیدل کیږي:

$$I\hat{A}O = \frac{\hat{A}}{2} - 90° + \hat{C} = \frac{\hat{A} - \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}\right) + 2\hat{C}}{2} = \frac{\hat{C} - \hat{B}}{2}$$

د $AO = R$ په پام کې نیولو سره:

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = 4R\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$



$$\Delta IOA: OI^2 = AO^2 + AI^2 - 2AO\cdot AI\cos OAI$$

$$= R^2 + 16R^2\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2} - 8R^2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C-B}{2}$$

$$= R^2 + 8R^2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$= R^2 - 8R^2 \sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}$$

$$= R^2\left[1 - 8\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$= R^2 - 2R\cdot 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

$$= R^2 - 2Rr$$

که I_1, I_2, I_3 په ترتیب، د بهرنیو محاطي دایرو مرکزونه وي، په همدې توګه ثبوتیږي چې:

$$\Rightarrow \begin{cases} OI_1^2 = R^2 + 2Rr_1 \\ OI_2^2 = R^2 + 2Rr_2 \\ OI_3^2 = R^2 + 2Rr_3 \end{cases}$$

ځوابونه

1 ځواب)

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}=>\begin{cases}\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=>\frac{D}{9}=\frac{G}{10}=>\frac{D}{9}=\frac{20}{10}=>D=18^\circ\\ \frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}=>\frac{20}{200}=\frac{R}{\pi}=>R=\frac{20\pi}{200}=>R=\frac{\pi}{10}\end{cases}$$

2 ځواب)

که د درجې او گراد له جنسه د زاويې اندازه په ترتيب D او G وي، د فرضيې له مخې لرو چې:

$I)\ G=D+15$

$$II)\ \frac{D}{180}=\frac{G}{200}=>\frac{D}{9}=\frac{G}{10}\xrightarrow{(I)}\frac{D}{9}=\frac{D+15}{10}=>9(D+15)=10D=>D=135^\circ$$

3 ځواب)

$$\begin{cases}x+y=\frac{5\pi}{12}\ rad\\ x-y=\frac{50}{3}gr\end{cases}\Bigg\rangle\begin{cases}x+y=\frac{5\pi}{12}\cdot\frac{180}{\pi}\\ x-y=\frac{50}{3}\cdot\frac{9}{10}\end{cases}\Bigg\rangle\begin{cases}x+y=75^\circ\\ x-y=15^\circ\end{cases}\Bigg\rangle\begin{cases}x=45^\circ\\ y=30^\circ\end{cases}$$

4 ځواب)

د يوه مثلث د زاويې مجموع 180° يا $\pi(rad)$ ده يعنې $A+B+C=\pi$.

$A=2x\,,B=3x\,,C=5x$

$$A+B+C=\pi=>2x+3x+5x=\pi=>10x=\pi=>x=\frac{\pi}{10}$$

$$if\quad A=2x=>A=2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$=>A=\frac{\pi}{5}$$

5 ځواب)

د کمان طول　　　د راديان له جنسه د زاويې اندازه

$\downarrow$　　　$\downarrow$

$2\pi L$　　　$2\pi(rad)$

$$\frac{1}{6}(2\pi L)\qquad x\qquad =>x=\frac{\frac{1}{6}(2\pi L)\cdot 2\pi}{2\pi L}=>x=\frac{\pi}{3}rad$$

6 ځواب)

$$7^\circ\ ,\ 30' = 7 + \frac{30}{60} = 7 + 0.5 = 7.5^\circ \quad , \quad 7.5^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{24}$$

$$\pi - \frac{\pi}{24} = \frac{23\pi}{24}$$

7 ځواب)

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} => \begin{cases} \frac{D}{180} = \frac{G}{200} => \frac{D}{9} = \frac{G}{10} => \frac{15}{9} = \frac{G}{10} => G = \frac{50}{3}\, gr \\ \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} => \frac{15}{180} = \frac{R}{\pi} => R = \frac{15\pi}{180} => R = \frac{\pi}{12}\, rad \end{cases}$$

8 ځواب)

$$G = 80.25 \quad , \ R = ?$$

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} => \frac{80.25}{200} = \frac{R}{\pi} => R = \frac{80.25}{200}\pi => R = \frac{321}{800}\pi$$

$$D = 165^\circ, 35', 15'' = 165 + \frac{35}{60} + \frac{15}{3600} = 165 + \frac{7}{12} + \frac{1}{240} = \left(\frac{39741}{240}\right)^0$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} => \frac{\frac{39741}{240}}{180} = \frac{R}{\pi} => R = \frac{39741}{43200}\pi$$

9 ځواب)

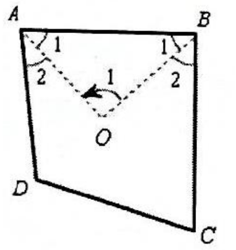
فرضوو چې دوې زاويې x او y وي.

$$\begin{cases} x + y = 80gr \\ x - y = 18^\circ \end{cases} \xrightarrow{80gr = 80\times\frac{9}{10} = 72^\circ} \begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = 18^\circ \end{cases} \begin{cases} x = 45^\circ \\ y = 27^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{D}{9} = \frac{G}{10} => \begin{cases} if\ \ D = 45^\circ => \frac{45}{9} = \frac{G}{10} => G = \frac{10\times 45}{9} => G = 50gr \\ if\ \ D = 27^\circ => \frac{27}{9} = \frac{G}{10} => G = \frac{10\times 27}{9} => G = 30gr \end{cases} \\ \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} => \begin{cases} if\ \ D = 45^\circ => \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} => R = \frac{45\pi}{180} => R = \frac{\pi}{4} \\ if\ \ D = 27^\circ => \frac{27}{180} = \frac{R}{\pi} => R = \frac{27\pi}{180} => R = \frac{3\pi}{20} \end{cases} \end{cases}$$

10 ځواب)

$$A_1 = A_2\ ,\ B_1 = B_2$$



$$A-B=\frac{\pi}{18} \Rightarrow A-B=\frac{\pi}{18}\times\frac{180}{\pi}$$
$$\Rightarrow A-B=10^\circ$$
$$\Rightarrow 2A_1-2B_1=10^\circ$$
$$\Rightarrow A_1-B_1=5^\circ$$
$$\Rightarrow A_1=B_1+5^\circ$$

$$O_1=\frac{250}{3}gr=\frac{250}{3}\cdot\frac{9}{10}=75^\circ$$

$$\Delta\ AOB: A_1+B_1+O_1=180^\circ \Rightarrow (B_1+5^\circ)+B_1=75^\circ=180^\circ$$
$$\Rightarrow 2B_1=100$$
$$\Rightarrow B_1=50^\circ\ ,\ (B=2B_1)$$
$$\Rightarrow B=100^\circ$$

$$A_1=B_1+5^\circ \Rightarrow A_1=50^\circ+5^\circ$$
$$\Rightarrow A_1=55^\circ\ ,\ (A=2A_1)$$
$$\Rightarrow A=2\times 55$$
$$\Rightarrow A=110^\circ$$

$$A+C=180^\circ \Rightarrow 110^\circ+C=180^\circ \Rightarrow C=70^\circ$$
$$B+D=180^\circ \Rightarrow 100^\circ+D=180^\circ \Rightarrow D=80^\circ$$

11 ځواب)

$$a=\frac{9}{19}b \Rightarrow b=\frac{10}{9}a \quad , \quad (b\in N)$$
$$\Rightarrow b=10k$$
$$\Rightarrow \min b=10\ ,\ (k=1)$$
$$\Rightarrow a=9^\circ$$

12 ځواب)

$$\begin{cases} x+y=60^\circ \\ x-y=\frac{100}{3}gr \Rightarrow x-y=\frac{100}{3}\times\frac{9}{10} \Rightarrow x-y=30^\circ \end{cases} \Bigg\rangle \begin{cases} x+y=60^\circ \\ x-y=30^\circ \end{cases}\Bigg\rangle$$

$$\begin{cases} x=45^\circ \\ y=15^\circ \end{cases}\Bigg\rangle \frac{y}{x}=\frac{15}{45} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{3}$$

13 ځواب)

$$D+15=G \Rightarrow D+15=\frac{10}{9}D$$

$$=> 15 = \frac{1}{9} D$$
$$=> D = 135°$$

14 ځواب)

$$H = 3 \ , \ M = 22$$
$$\alpha = \frac{11M}{2} - 30H = \frac{11 \times 22}{2} - 30(3) = 31°$$

15 ځواب)

$$H = 1 \ , \ M = 50$$
$$\alpha = \frac{11M}{2} - 30H = \frac{11 \times 50}{2} - 30(1) = 245°$$
$$\alpha = 360° - 245° = 115°$$

16 ځواب)

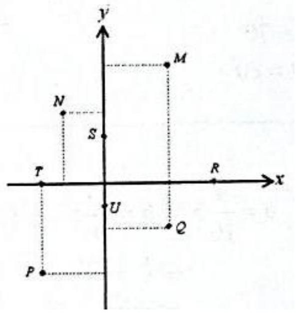
که د ساعت شمېر عقربه 12 عدد وښيي، نو $H = 0$ په پام کې نیسو:

$$H = 0 \ , \ M = 17$$
$$\alpha = \frac{11M}{2} - 30H = \frac{11 \times 17}{2} - 30(0) = 93.5°$$

17 ځواب)

لومړی:

دویم:



$M(3,5)$:
$$r = OM = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{3}$$
$$\cot\theta = \frac{3}{5}$$

$N(-2,3)$:
$$r = ON = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} - \frac{3}{\sqrt{13}}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} \backslash$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2}$$
$$\cot\theta = \frac{-2}{3}$$

$R(5,0)$:

$r = OR = \sqrt{25} = 5$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{5} = 0$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5} = 1$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{5} = 0$

$S(0,2)$:

$r = OS = \sqrt{4} = 2$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2} = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{2} = 0$

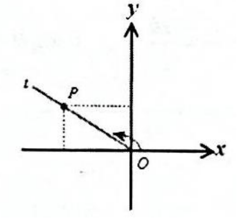
$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{2} = 0$

په R نقطه کې $\cot\theta$ نشي تعریف کېدلی.

په S نقطه کې $\tan\theta$ نشي تعریف کېدلی.

18 ځواب)

دغه نیم خط د پاسني شکل په توګه دی. $P(-1,1)$ نقطه ددغه نیم خط پرمخ ټاکو، نو وبه لرو چې:



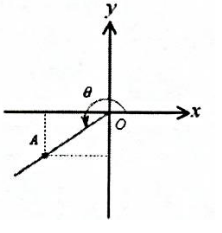
$OP = r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{1} = -1$

19 ځواب)

لومړی:



دویم:

$3y - 2x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$, $y \le 0$

if $A(-3,-2)$, $O(0,0)$:

$OA = r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$,

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

20 ځواب)

لومړی:

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=>\frac{6}{10}=\frac{3}{r}$$
$$=>r=5$$

$$x^2+y^2=25=>(3)^2+(m-1)^2=25=>(m-1)^2=16=>m-1=\pm4=>\begin{cases}m=5\\m=-3\end{cases}$$

له دې چې p په څلورمه ناحيه کې ده نو څکه $m-1<0$ دی، نباً $m=-3$ د منلو وړ دی.

$$m=-3=>P(3,-4)$$

دويم:

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-4}{5}\ ,\ \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-4}{3}\ ,\ \cot\theta=\frac{-3}{4}$$

21 ځواب)

$$P(x,y):r=\sqrt{x^2+y^2}$$

1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=\frac{y^2+x^2}{r^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}=1$

2) $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

3) $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\left(\frac{x}{r}\right)}{\left(\frac{y}{r}\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

4) $\tan\theta\times\cot\theta=\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}=1$

22 ځواب)

په يوه قايم الزاويه مثلث کې لومړی له لاندې قضيو څخه يادونه کوو:

1) په هر قايم الزاويه مثلث کې، 30° زاويې ته د مخامخ ضلعې اندازه د وتر نيمايي ده.

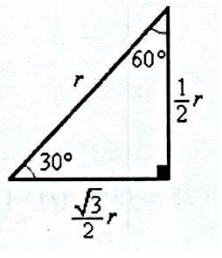
2) په هر قايم الزاويه مثلث کې، د 60° درجې زاويې مخامخ ضلعې اندازه د وتر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ چنده ده.

په دې اساس، که په لاندې قایم الزاویه مثلث کې، وتر مساوي په r وي، په هغه صورت کې $30°$ تـه د مخامخ ضلعې اندازه $\frac{1}{2}r$ او $60°$ زاويې ته د مخامخ ضلعې اندازه $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ کيږي، په پايله کې:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{\frac{1}{2}r} = \sqrt{3}$$



$$\cot 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{\frac{1}{2}r} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = 2$$

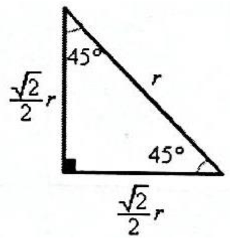
$$\csc 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2 \qquad \csc 60° = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

د $45°$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو د محاسبې لپاره لرو چې:

$$\sin 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}r}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}r}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}r}{\frac{\sqrt{2}}{2}r} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}r}{\frac{\sqrt{2}}{2}r} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2} \qquad \csc 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$$

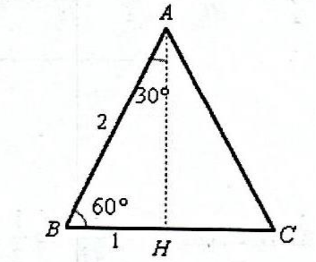


23 ځواب)

ABC متساوي الاضلاع مثلث چې ضلع يې $2cm$ (يا هره بله اندازه وي) په پام کې نيسو، AH ارتفاع رسموو. پوهيږو چې په متساوي الاضلاع مثلث کې، ارتفاع، ناصف او ميانه درې واړه وي، په ABH قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$AB = 2\ ,\ BH = 1$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 => AH^2 = AB^2 - BH^2$$
$$=> AH^2 = 4 - 1$$
$$=> AH^2 = 3$$
$$=> AH = \sqrt{3}$$



$$\sin 30° = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} = \cos 60° \qquad \tan 30° = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot 60°$$

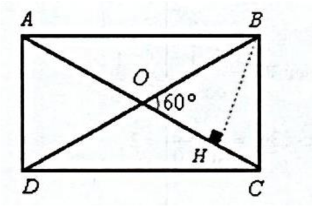
$$\cos 30° = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60° \qquad \cot 30° \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \tan 60°$$

24 ځواب)

$ABCD$ مستطيل رسموو، فرضوو چې O د دوو قطرونو د يو ځای کېدو ځای وي، له B څخه BH عمود پر AC قطر رسموو.

په OBH قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\sin 60° = \frac{BH}{OB} => \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{4} => BH = 2\sqrt{3}$$



د $ABCD$ مستطیل مساحت د ABC مثلث د مساحت دوه چنده دی.

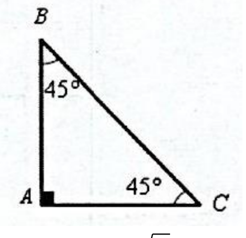
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 2 \times S_{ABC} \\ &= 2 \times \frac{AC \times BH}{2} \\ &= 8 \times 2\sqrt{3} \\ &= 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

25 ځواب)

ABC متساوي الساقین قایم الزاویه مثلث داسې په پام کې نیسو چې د قایم زاویې اړوند ضلعې انـدازه یې یو سانتي متر وي.

$$\hat{B} = \hat{C} = 45°$$

$$\begin{aligned} BC^2 = AB^2 + AC^2 &=> BC^2 = 1^2 + 1^2 \\ &=> BC^2 = 2 \\ &=> BC = \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{1} = 1, \cot \widehat{B} = 1$$

26 ځواب)

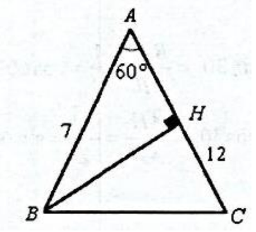
BH رسموو:

$$\Delta\, ABH : \cos 60° = \frac{AH}{AB} => \frac{1}{2} = \frac{AH}{7} => AH = \frac{7}{2}$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 => BH^2 = AB^2 - AH^2 => BH^2 = 49 - \frac{49}{4} => BH = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$CH = AC - AH = 12 - \frac{7}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\Delta BCH: BC^2 = BH^2 + HC^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{147}{4} + \frac{289}{4} = \frac{436}{4} = 109 \Rightarrow BC = \sqrt{109}$$

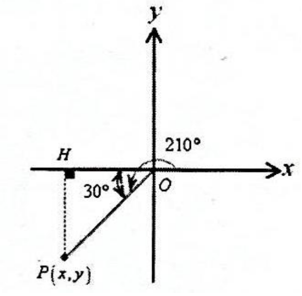


27 ځواب)

لومړی د P مختصات ترلاسه کوو. په OPH مثلث کې لرو چې:

$$\sin 30° = \frac{PH}{OP} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{PH}{2} \Rightarrow PH = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$\cos 30° = \frac{OH}{OP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{2} \Rightarrow OH = \sqrt{3} \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$



په دې اساس $P(-\sqrt{3}, -1)$ دی او ځکه چې:

$$\sin 210° = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \qquad \tan 210° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 210° = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 210° = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

28 ځواب)

شکل ته په پام سره که $P(x, y)$ وي په دې صورت کې $x = -3$ کېږي P درېيمه ناحيه کې دی.

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow (-3)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow y = -4$$

$P(-3, -4)$

1) $\sin^2 \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5}$ 2) $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}$

3) $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ 4) $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

5) $\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)=\left(\frac{-3}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{16}{9}\right)=\frac{9}{25}\left(-\frac{7}{9}\right)=-\frac{7}{25}$

6) $\frac{\sin\theta-\tan\theta}{\cot\theta+\tan\theta}=\frac{-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}$

29 ځواب)

$$\cot\theta=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{5}{3}\Rightarrow y=\frac{3}{5}x$$

$$x^2+y^2=r^2\Rightarrow x^2+y^2=\left(2\sqrt{17}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=68$$

$$\Rightarrow x^2+\left(\frac{3}{5}x\right)^2=68$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{9}{25}x^2=68$$

$$\Rightarrow x^2=50$$

$$\Rightarrow x=\pm5\sqrt{2}$$

P په دریيمه ناحیه کې دی $(x<0\ ,\ y<0)$

$$\Rightarrow x=-5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y=-3\sqrt{2}$$

$$P\left(-5\sqrt{2}\ ,\ -3\sqrt{2}\right)$$

30 ځواب)

$$\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\xrightarrow{a,b>0}\begin{cases}y=\sqrt[3]{b}\\x=\sqrt[3]{a}\end{cases}$$

$$if\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow r=\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}=\frac{a}{\left(\frac{x}{r}\right)}+\frac{b}{\left(\frac{y}{r}\right)}$$

$$=\frac{ra}{x}+\frac{rb}{y}$$

$$=r\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$$

$$= r\left(\frac{a}{\sqrt[3]{a}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b}}\right)$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} \cdot \left(a^{1-\frac{1}{3}} + b^{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

ځواب) 31

$$\sin 20° = \sin(90° - 70°)$$
$$= \cos 70°$$

ځواب) 32

$$\cos 32° = \cos(90° - 58°)$$
$$= \sin 58°$$

ځواب) 33

$$\tan(22°,30') = \tan[90° - (67°,30')]$$
$$= \cot(67°,30')$$

ځواب) 34

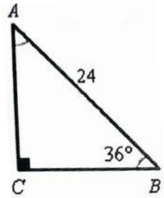
$$\sec 27° = \sec(90° - 63°)$$
$$\csc 63°$$

ځواب) 35

د مثلث د حل څخه موخه د مجهول جز ترلاسه کول دي.

معلوم : $\widehat{C} = 90°\ ,\ \ \widehat{B} = 36°\ ,\ \ AB = 24$

مجهول : $\widehat{A}\ ,\ BC = a\ ,\ AC = b$



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180 \Rightarrow \widehat{A} + 36° + 90° = 180° \Rightarrow \widehat{A} = 54°$$

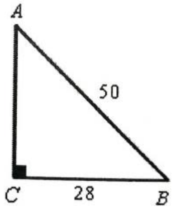
$$\sin 36° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cdot \sin 36° = 24 \times \sin 36°$$

$$\cos 36° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \cdot \cos 36° = 24 \times \sin 36°$$

ځواب) 36

معلوم : $AB = 50\ , BC = 28\ ,\ \widehat{C} = 90°$

مجهول : $\widehat{A}\ ,\ \widehat{B}\ ,\ AC$



$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow \sin A=\frac{28}{50}=0.56 \Rightarrow \hat{A}\approx 34^\circ$$

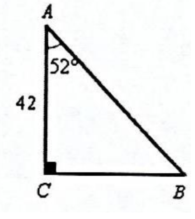
$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180 \Rightarrow 34^\circ+\widehat{B}+90^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{B}=56^\circ$$

$$\sin\widehat{B}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow AC=AB\cdot\sin\widehat{B} \Rightarrow AC=50\times\sin 56^\circ=50\times 0.829=41.45$$

37 ځواب)

معلوم : $\hat{C}=90^\circ\ ,\ \hat{A}=52^\circ\ ,\ AC=42$

مجهول : B, BC, AB



$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow 52^\circ+\widehat{B}+90^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{B}=38^\circ$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow BC=AC\cdot\tan\hat{A} \Rightarrow BC=42\cdot\tan 52^\circ \Rightarrow BC=42\times 1.28 \Rightarrow BC=53.76$$

$$\cos\widehat{A}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow AB=\frac{AC}{\cos\widehat{A}} \Rightarrow AB=\frac{42}{\cos 52^\circ} \Rightarrow AB=\frac{42}{0.615} \Rightarrow AB=68.29$$

38 ځواب)

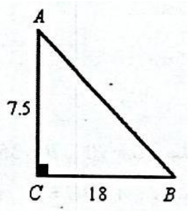
معلوم : $\hat{C}=90^\circ\ ,\ BC=18\ ,\ AC=7.5$

مجهول : $\hat{A}, \hat{B}, AB$

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \tan\hat{B}=\frac{7.5}{18} \Rightarrow \tan\hat{B}=0.41 \Rightarrow \hat{B}\approx 22^\circ$$

$$\sin\widehat{B}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow AB=\frac{AC}{\sin\widehat{B}} \Rightarrow AB=\frac{7.5}{\sin 22} \Rightarrow AB\approx\frac{7.5}{0.38} \Rightarrow AB=19.7$$

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \widehat{A}+22^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow A\approx 68^\circ$$



39 ځواب)

$$\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} \ , \ R = 5 \ , \ \alpha = ?$$

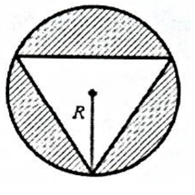
$$\widehat{AB} = R\alpha \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 5\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{10}$$

$$\Rightarrow \alpha = 18^\circ$$

40 ځواب)

هر قطعې ته مخامخ زاويه $(rad)\ \frac{2\pi}{3} = 120^\circ = \alpha$ ده، نو د تورې شوې برخې مساحت عبارت دی له:



$$S = 3\left[\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)\right]$$

$$= 3\left[\frac{1}{2}R^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 3\left[\frac{1}{2}R^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

(يادونه) $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

41 ځواب)

$$\sin 150^\circ = \overline{OF} = \overline{HM}$$

$$\cos 150^\circ = \overline{OH}$$

$$\tan 150° = \overline{AN}$$

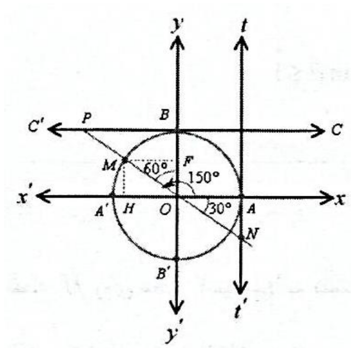
$$\cot 150° = \overline{BP}$$

$$\Delta OMH : \sin 30° = \frac{MH}{OM} => \frac{1}{2} = \frac{MH}{1} => \overline{MH} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{OH}{OM} => \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{1} => \overline{OH} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta OAN : \tan 30° = \frac{AN}{OA} => \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AN}{1} => \overline{AN} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta OBP : \tan 60° = \frac{BP}{OB} => \sqrt{3} = \frac{BP}{OB} => \overline{BP} = -\sqrt{3}$$

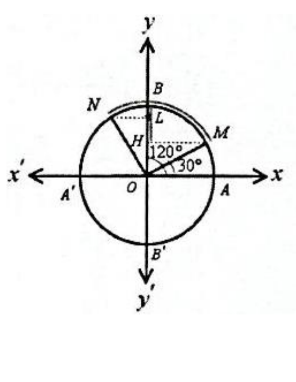


$$\sin 150° = \overline{HM} = \frac{1}{2} \qquad \tan 150° = \overline{AN} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 150° = \overline{OH} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 150° = \overline{BP} = -\sqrt{3}$$

42 ځواب)

کله چې $\theta = 30°$ او θ ته د مخامخ کمان پای په M نقطه کې وي، نو $\sin\theta = \overline{OH} = \frac{1}{2}$ دی. د زاویې په ډېرېدو سره، د OH قطعه خط الجبري اندازه هم ډېرېږي، تر هغه چې $\theta = 90°$ شي، په دې حالت کې $\sin\theta = 1$ کیږي.

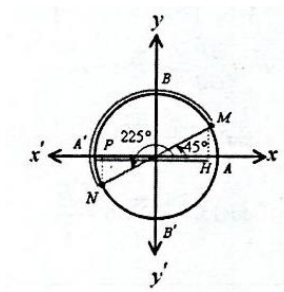


دا چې تر N نقطې پورې(چېرې چې $\theta = 120°$ وي) د θ په ډېرېدوسره، د ساين قيمت کمېږي، ترڅو $\sin\theta = OL$ قيمت ترلاسه شي، نو ترسره شوي حرکت ته په پام سره ليدل کېږي چې تر ټولو ستر عدد چې د ساين پرمحور ترلاسه شوی 1 دی او تر ټولو وړوکی يې $\frac{1}{2}$ دی، په بل عبارت:

$$if \quad 30° \le \theta \le 120° => \frac{1}{2} \le \sin\theta \le 1$$

43 ځواب)

کله چې $\theta = 45°$ وي، $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ دی، او د زاويې په ډېرېدو سره، د کوساين محور پرمخ H نقطه کيڼ لور ته حرکت کوي، له O تېرېږي او کله چې $\theta = 180°$ شي، له دې وروسته د زاويې په ډېرېدو سره H نقطه A' ته رسيږي او حرکت په ښي لور پيل کوي، ترهغه چې $\theta = 225°$ شي،
چې په دې وخت کې H او P منطبق کيږي، نو په دې پروسه کې د $\cos\theta$ لپاره تر ټولو لوړ قيمت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ عدد او تر ټولو لږ قيمت -1 دی.



$$if \quad 45° \le \theta \le 225° => -1 \le \cos\theta \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=> -1 \le 2 + m \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=> -3 \le m \le \frac{\sqrt{2}-4}{2}$$

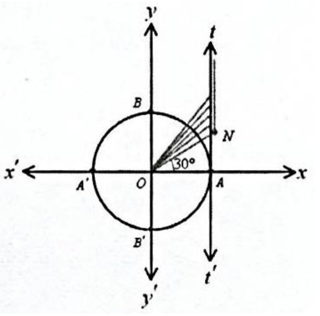
44 ځواب)

پوهيږو چې $\frac{\pi}{6} rad = 30°$ او $\frac{2\pi}{3} rad = 120°$ او $30° < 90° < 120°$ دي.

له دې چې $\tan 90°$ نه دی تعريف شوی، نو ځکه ښه ده خو خپلې څېړنې په دوو برخو ترسره کړو.

الف) $30° \le \theta < 90°$

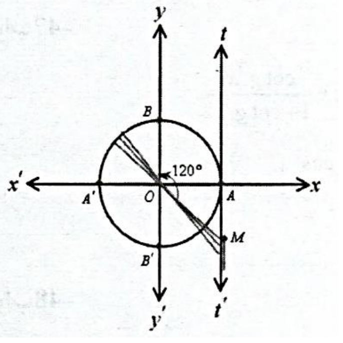
په دې حالت کې $\overline{AN} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ دی. په دې برخه کې د زاويې په ډېرېدو سره، N نقطه د Nt قطعه خط پرمخ پاس لور ته حرکت کوي، نو ځکه دلته کولی شو ووايو:



$$\tan\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{3} => m-1 \geq \frac{\sqrt{3}}{3} => m \geq \frac{\sqrt{3}+3}{3}$$

ب) $90° < \theta \leq 120°$

د زاویې(له $\frac{\pi}{2}$ څخه سترو زاویو) په ډېرېدو سره، N نقطه د تانجانت محور له لاندې برخې (ډېر واړه منفي اعدادو) څخه، پورته لور ته حرکت کوي، تر هغه چې د زاويې اندازه $\theta = 120°$ شي، M نقطه $\tan 120° = -\sqrt{3}$ ته ورسيږي، نو ځکه په دغه حالت کې کولی شو ووایو:



$$\tan\theta \leq -\sqrt{3} => m-1 \leq -\sqrt{3} => m \leq 1-\sqrt{3}$$

45 ځواب)

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

46) ځواب

$$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\qquad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\sec^2\frac{\pi}{6}\cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\csc^2\frac{\pi}{6}\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+(2)^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+(4)\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}+2\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}+4+2\sqrt{3}$$

$$=\frac{14+6\sqrt{3}}{3}$$

47) ځواب

$$\frac{\csc x\tan^2 x}{1+\tan^2 x}+\frac{\sec x\cot^2 x}{1+\cot^2 x}=\csc x\cdot\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}+\sec x\frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sin x}\cdot\sin^2 x+\frac{1}{\cos x}\cdot\cos^2 x$$

$$=\sin x+\cos x$$

48) ځواب

$$\frac{\tan x}{\cot^2 x\sec^2 x}+\frac{\cot x}{\tan^2 x\csc^2 x}-\sec x\cdot\csc x$$

$$=\tan x\cdot\frac{1}{\cot^2 x}\cdot\frac{1}{\sec^2 x}+\cot x\cdot\frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\csc^2 x}-\sec x\cdot\csc x$$

$$=\tan^3 x\cdot\cos^2 x+\cot^3 x\cdot\sin^2 x-\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}$$

$$=\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cdot\cos^2 x+\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\cdot\sin^2 x-\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}$$

$$=\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x}-\frac{1}{\cos x\sin x}$$

$$=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x-1}{\cos x\cdot\sin x}$$

$$=\frac{\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)-1}{\cos x\sin x}$$

$$= \frac{-2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos x \sin x}$$
$$= -2\sin x \cdot \cos x$$

49 ځواب)

$$\frac{\tan A - \tan B}{\cos B - \cot A} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan A}}$$
$$= \frac{\tan A - \tan B}{\frac{\tan A - \tan B}{\tan B \cdot \tan A}}$$
$$= \tan B \cdot \tan A$$
$$= \frac{\tan A}{\cot B}$$

50 ځواب)

$$\frac{1-\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x + 2} = \frac{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - \sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x + 2}$$
$$= \frac{\sin^2 x(1-\sin x) + \cos^2 x(1-\cos x)}{\sin x + \cos x + 2}$$
$$= \frac{\left(1-\cos^2 x\right)(1-\sin x) + \left(1-\sin^2 x\right)(1-\cos x)}{\sin x + \cos x + 2}$$
$$= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1-\sin x) + (1-\sin x)(1+\sin x)(1-\cos x)}{\sin x + \cos x + 2}$$
$$= \frac{(1-\sin x)(1-\cos x)\left[(1+\cos x) + (1+\sin x)\right]}{\sin x + \cos x + 2}$$
$$= \frac{(1-\sin x)(1-\cos x)(2+\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x + 2}$$
$$= (1-\sin x)(1-\cos x)$$

51 ځواب)

$$\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1+\sin x\cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)\left(\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x\right)}{1+\sin x \cos x}$$
$$= \frac{(\cos x - \sin x)(1+\sin x\cos x)}{(1+\sin x \cos x)}$$
$$= \cos x - \sin x$$

52 ځواب)

$$\sqrt{1+2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}} = \sqrt{1+2\sin x\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{1+2\sin x|\cos x|} \quad ; \quad if \ \ \pi < x < \frac{3\pi}{2} => |\cos x| = -\cos x$$
$$= \sqrt{1-2\sin x\cos x}$$
$$= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}$$
$$= \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}$$
$$= |\sin x - \cos x|$$

53 ځواب)

$$\frac{1}{1-\tan 10^\circ} + \frac{1}{1-\tan 80^\circ} = \frac{(1-\tan 80^\circ)+(1-\tan 10^\circ)}{(1-\tan 10^\circ)(1-\tan 80^\circ)}$$
$$= \frac{(1-\tan 80^\circ)+(1-\tan 10^\circ)}{1-\tan 80^\circ - \tan 10^\circ + \tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ}$$
$$= \frac{(1-\tan 80^\circ)+(1-\tan 10^\circ)}{1-\tan 80^\circ - \tan 10^\circ + \cot 80^\circ \cdot \tan 80^\circ}$$
$$= \frac{(1-\cot 10^\circ + 1 - \tan 10^\circ)}{1-\tan 80^\circ - \tan 10^\circ + 1}$$
$$= \frac{1-\cot 10^\circ + 1 - \tan 10^\circ}{1-\cot 10^\circ - \tan 10^\circ + 1}$$
$$= 1$$

54 ځواب)

$$\sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$$
$$= (\sin^6 x + \cos^6 x) - (\sin^4 x + \cos^4 x) - \sin^4 x + \sin^2 x$$
$$= (1-3\sin^2 x\cos^2 x) - (1-2\sin^2 x\cos^2 x) + \sin^2 x(1-\sin^2 x)$$
$$= 1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 1 + 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$= 0$$

55 ځواب)

$$\sqrt{1-2\sqrt{\sin^2\theta\cdot(1-\sin^2\theta)}} = \sqrt{1-2\sqrt{\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}}$$
$$= \sqrt{1-2|\sin\theta\cos\theta|}$$

θ په لومړی ربع کې ده او $\sin\theta$ او $\cos\theta$ دواړه مثبت دي، نو $|\sin\theta\cos\theta| = +(\sin\theta\cos\theta)$

$$= \sqrt{1-2\sin\theta\cdot\cos\theta}$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cdot\cos\theta}$$
$$= \sqrt{(\sin\theta - \cos\theta)^2}$$

$$= |\sin\theta - \cos\theta| \qquad (I)$$
$$= -\sin\theta + \cos\theta$$

$$(I): if \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta > \sin\theta \Rightarrow \sin\theta - \cos\theta < 0$$
$$\Rightarrow |\sin\theta - \cos\theta| = -(\sin\theta - \cos\theta) = -\sin\theta + \cos\theta$$

56 ځواب)

$$\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - 3\tan^2 x \cdot \cos^4 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} + \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x}$$
$$= \tan^6 x + 1$$

57 ځواب)

$$\sqrt{\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} = \sqrt{\tan^2\alpha\left(\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\right)}$$
$$= \sqrt{\tan^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\sin^2\alpha}$$
$$= |\sin\alpha| \qquad (I)$$
$$= -\sin\alpha$$

$$(I): if \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin\alpha < 0 \Rightarrow |\sin\alpha| = -\sin\alpha$$

58 ځواب)

$$\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2} = \sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2\underbrace{(\tan\alpha \cdot \cot\alpha)}_{1}}$$
$$= \sqrt{(\tan\alpha + \cot\alpha)^2}$$
$$= |\tan\alpha + \cot\alpha| \qquad (I)$$
$$= -(\tan\alpha + \cot\alpha)$$
$$= -\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$(\mathrm{I}): if\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\tan\alpha<0\\ \cot\alpha<0\end{matrix}\right\rangle \tan\alpha+\cot\alpha<0 \Rightarrow |\tan\alpha+\cot\alpha| = -(\tan\alpha+\cot\alpha)$$

59 ځواب)

$$\begin{cases}\sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \left(1+\tan^2\theta\right) \Rightarrow \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta\\ \csc^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta} = \left(1+\cot^2\theta\right) \Rightarrow \csc^2\theta = 1+\cot^2\theta\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sec^2\theta-\csc^2\theta &= \left(1+\tan^2\theta\right)-\left(1+\cot^2\theta\right)\\ &= \tan^2\theta-\cot^2\theta\\ &= (\tan\theta-\cot\theta)(\tan\theta+\cot\theta)\\ &= (\tan\theta-\cot\theta)\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}\right)\\ &= \frac{\tan\theta-\cot\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}\end{aligned}$$

60 ځواب)

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} &= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}}\\ &= \sqrt{\left[\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}\right]}\\ &= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}\\ &= \left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right|\\ &= \left|\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right|\\ &= |\sec\theta+\tan\theta|\end{aligned}$$

61 ځواب)

$$\begin{aligned}\sin^2 x+\tan^2 x\cdot\sin^2 x &= \sin^2 x\left(1+\tan^2 x\right)\\ &= \sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \tan^2 x\end{aligned}$$

62 ځواب)

$$\sin\alpha\cdot\tan^2\alpha\cdot\cot^3\alpha=\sin\alpha\cdot\frac{\sin^2 a}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}$$
$$=\cos\alpha$$

63 ځواب)

$$\cos^2 a\left(\frac{1}{\cos a}+\tan a\right)\left(\frac{1}{\cos a}-\tan a\right)+2\tan^2 a\cdot\cos^2 a$$
$$=\cos^2 a\left(\frac{1}{\cos^2 a}-\tan^2 a\right)+2\sin^2 a$$
$$=\cos^2 a\left[\left(1+\tan^2 a\right)-\tan^2 a\right]+2\sin^2 a$$
$$=\cos^2 a+2\sin^2 a$$
$$=\underbrace{\cos^2 a+\sin^2 a}_{1}+\sin^2 a$$
$$=1+\tan^2 a$$

64 ځواب)

$$\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\tan^4 x}=\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}$$
$$=\frac{1+\cos^4 x}{\sin^4 x}$$
$$=\frac{1+\left(\cos^2 x\right)^2}{\sin^4 x}$$
$$=\frac{1+\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^4 x}$$
$$=\frac{1+\left(1+\sin^4 x-2\sin^2 x\right)}{\sin^4 x}$$
$$=\frac{2-2\sin^2 x+\sin^4 x}{\sin^4 x}$$
$$=\frac{2-2\sin^2 x}{\sin^4 x}+\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x}$$
$$=\frac{2\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^4 x}+1$$
$$=\frac{2\cos^2 x}{\sin^4 x}+1$$

$$=\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}+1$$
$$=\frac{2\cot^2 x}{\sin^2 x}+1$$

65 ځواب)

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x(1-\tan^2 x)}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{2\cos^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\cos^2 x-\cos^2 x\tan^2 x}$$
$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+1$$
$$=\frac{2\sin x}{\sin x-\cos x}$$

د کسر صورت او مخرج پر $\cos x$ تقسیموو $(\cos x\neq 0)$

$$=\frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}$$
$$=\frac{2\tan x}{\tan x-1}$$

66 ځواب)

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha(1+\tan\alpha)(1+\cot\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha(1+\cot\alpha+\tan\alpha+\tan\alpha\cdot\cot\alpha)$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\alpha(2+\tan\alpha+\cot\alpha)$$
$$=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\cot\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$
$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

67 ځواب)

$$\left(\frac{\cos a}{\tan a}+\frac{\sin a}{\cot a}\right)\sin a\cdot\cos a=\left(\frac{\cos a}{\frac{\sin a}{\cos a}}+\frac{\sin a}{\frac{\cos a}{\sin a}}\right)\sin a\cos a$$
$$=\left(\frac{\cos^2 a}{\sin a}+\frac{\sin^2 a}{\cos a}\right)\sin a\cos a$$

$$= \left(\frac{\cos^3 x + \sin^3 a}{\sin a \cdot \cos a} \right) \sin a \cdot \cos a$$
$$= \cos^3 a + \sin^3 a$$
$$= (\cos a + \sin a)(\cos^2 a - \sin a \cos a + \sin^2 a)$$
$$= (\cos a + \sin a)(1 - \sin a \cos a)$$

68 ځواب)

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$$
$$= \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}$$
$$= \frac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{2}{\sin\alpha}$$

69 ځواب)

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$
$$= \frac{1+\sin x}{|\cos x|} - \frac{|1-\sin x|}{|\cos x|} \qquad (\mathrm{I})$$
$$= \frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{1-\sin x}{\cos x}$$
$$= \frac{2\sin x}{\cos x}$$
$$= 2\tan x$$

$(\mathrm{I}) : if\ \ 0 \le x < 90 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 1 \Rightarrow -1 < -\sin x < 0 \Rightarrow 0 < 1 - \sin x < 1 \Rightarrow |1-\sin x| = +(1-\sin x) \\ \cos x > 0 \Rightarrow |\cos x| = +\cos x \end{cases}$$

70 ځواب)

$$\frac{2\left(1-\sin^3 x-\cos^3 x\right)}{\sin x+\cos x+2}=\frac{2\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-\sin^3 x-\cos^3 x\right]}{\sin x+\cos x+2}$$

$$=\frac{2\left[\sin^2 x(1-\sin x)+\cos^2 x(1-\cos x)\right]}{\sin x+\cos x+2}$$

$$=\frac{2\left[\left(1-\cos^2 x\right)(1-\sin x)+\left(1-\sin^2 x\right)(1-\cos x)\right]}{\sin x+\cos x+2}$$

$$=\frac{2\left[(1-\cos x)(1+\cos x)(1-\sin x)+(1-\sin x)(1+\sin x)(1-\cos x)\right]}{\sin x+\cos x+2}$$

$$=\frac{2\left[(1-\cos x)(1-\sin x)(1+\cos x+1+\sin x)\right]}{(\sin x+\cos x+2)}$$

$$=\frac{2(1-\cos x)(1-\sin x)(2+\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x+2)}$$

$$=2(1-\cos x)(1-\sin x)$$

$$=2(1-\sin x-\cos x+\sin x\cos x)$$

$$=2-2\sin x-2\cos x+2\sin x\cos x$$

$$=(1+1)-2\sin x-2\cos x+2\sin x\cos x$$

$$=1+\underbrace{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}_{1}-2\sin x-2\cos x+2\sin x\cos x$$

$$=(1-\sin x-\cos x)^2$$

71 ځواب)

په دې مثال کې د مساواتو دواړه خواوې دومره ساده کوو، ترڅو هغه مساوات ترلاسه کړو چې دواړه خواوې يې سره مساوي وي.

دې ته مو پام وي چې د دويم لوري کسر معنی لرونکی وي، نو بايد $1+\cos a\neq 0$ وي. لومړی د مساواتو دواړه خواوې له $1+\cos a$ سره ضربوو:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}=\frac{1}{(1+\cos\alpha)\left(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha\right)}$$

$$=>\frac{(1+\cos a)(1+\cos\alpha)}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}=\frac{(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\left(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha\right)}$$

$$=>\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}=\frac{1}{\left(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha\right)}$$

$$=>\frac{\sin^2\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}=\frac{1}{\left(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha\right)}$$

$$=> \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{(1+\tan^2\alpha)^2} = \frac{1}{(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha)}$$

$$=> \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \cdot \frac{1}{(1+\tan^2\alpha)^2} = \frac{1}{(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha)}$$

$$=> \frac{\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^3} = \frac{1}{(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha)}$$

د مساواتو د دويم لوري کسر صورت او مخرج له $\tan^2\alpha$ سره ضربوو:

$$=> \frac{\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^3} = \frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha(3+\cot^2\alpha+3\tan^2\alpha+\tan^4\alpha)}$$

$$=> \frac{\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^3} = \frac{\tan^2\alpha}{3\tan^2\alpha+1+3\tan^4\alpha+\tan^6\alpha}$$

$$=> \frac{\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^3} = \frac{\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^3}$$

72 ځواب)

$$\frac{\sin^2 x\cdot\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + \frac{\cos^2 x\cdot\cot^2 x}{1+\cot^2 x} + 2\cos^2 x - 2\cos^4 x$$

$$= \frac{\sin^2 x\cdot\tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} + \frac{\cos^2 x\cdot\cos^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x}} + 2\cos^2 x - 2\cos^4 x$$

$$= \sin^2 x\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x + \cos^2 x\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2\cos^4 x$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\cos^2 x(1-\cos^2 x)$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$= (1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x) + 2\cos^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$= 1$$

73 ځواب)

$$\begin{aligned}\tan x(\cot x+2\cos^2 x) &= \tan x\cdot\cot x + 2\tan x\cdot\cos^2 x\\ &= 1+2\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x\\ &= 1+2\sin x\cdot\cos x\\ &= (\sin^2 x+\cos^2 x)+2\sin x\cdot\cos x\\ &= (\sin x+\cos x)^2\end{aligned}$$

74 ځواب)

$$\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x}+\frac{\cot^3 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}=\tan^3 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)+\cot^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}$$

$$=\tan^3 x\left(1+\cot^2 x\right)+\cot^3 x\left(1+\tan^2 x\right)-\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right)$$

$$=\tan^3 x\left(1+\cot^2 x\right)+\cot^3 x\left(1+\tan^2 x\right)-\left(\tan x+\cot x\right)$$

$$=\tan^3 x+\tan^3 x\cdot\cot^2 x+\cot^3 x+\cot^3 x\cdot\tan^2 x-\left(\tan x+\cot x\right)$$

$$=\left(\tan^3 x+\cot^3 x\right)+\tan^2 x\cdot\cot x^2\left(\tan x+\cot x\right)-\left(\tan x+\cot x\right)$$

$$=\left(\tan^3 x+\cot^3 x\right)+\tan x+\cot x-\tan x-\cot x$$

$$=\tan^3 x+\cot^3 x$$

75 ځواب)

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{\left(1+\sin x\right)^2-\left(1-\sin x\right)^2}{\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)}$$

$$=\frac{4\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{4\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=4\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=4\tan x\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\frac{4\tan x}{\cos x}$$

76 ځواب)

$$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}+\frac{\cot^3 x}{1+\cot^2 x}=\tan^3 x\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)+\cot^3 x\left(\frac{1}{1+\cot^2 x}\right)$$

$$=\tan^3 x\cdot\cos^2 x+\cot^2 x\cdot\sin^2 x$$

$$=\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cdot\cos^2 x+\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\cdot\sin^2 x$$

$$=\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin x\cdot\cos x}$$

$$= \frac{1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}$$

77 ځواب)

يادونه) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$\sin^8 x+\cos^8 x+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\left[(\sin^4 x)^2+(\cos^4 x)^2\right]+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$=\left[(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cdot\cos^4 x\right]+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$=\left[(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4\cos^4 x\right]+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$=(1+4\sin^4 x\cos^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x\cos^4 x)+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$=(1+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x)+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$=1+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x$$

78 ځواب)

$$\frac{a\tan^2 a+c}{a\sin^2 a+c\cos^2 a}=\frac{\frac{1}{\cos^2 a}(a\tan^2 a+c)}{\frac{1}{\cos^2 a}(a\sin^2 a+c\cos^2 a)}$$
$$=\frac{\frac{1}{\cos^2 a}(a\tan^2 a+c)}{\frac{a\sin^2 a}{\cos^2 a}+c\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}$$
$$=\frac{\frac{1}{\cos^2 a}(a\tan^2 a+c)}{(a\tan^2 a+c)}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 a}$$
$$=(1+\tan^2 a)$$

79 ځواب)

$$3(\sin^4 x+\cos^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)=3(1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x)-2(1-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x)$$
$$=3-6\sin^2 x\cdot\cos^2 x-2+6\sin^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$=1$$

80 ځواب)

$$(\sin^6 x+\cos^6 x-1)^3=(1-3\sin^2 x\cos^2 x-1)^3$$
$$=(-3\sin^2 x\cdot\cos^2 x)^3$$
$$=-27\sin^6 x\cos^6 x$$

81 ځواب)

$$\frac{\sin^2 x}{1+\tan^2 x}-\frac{\cos^2 x}{1+\cot^2 x}=\sin^2 x\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)-\cos^2 x\left(\frac{1}{1+\cot^2 x}\right)$$
$$=\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 x$$
$$=0 \qquad (\mathrm{I})$$
$$\tan^2 x+1-\sec^2 x=\left(1+\tan^2 x\right)-\sec^2 x$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}-\sec^2 x$$
$$=\sec^2 x-\sec^2 x$$
$$=0 \qquad (\mathrm{II})$$

پاسنۍ مساوات صدق کوي.

82 ځواب)

$$\sin\theta+\csc\theta=2 \Rightarrow \sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}=2$$
$$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta+1}{\sin\theta}=2$$
$$\Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta+1=0$$
$$\Rightarrow (\sin\theta-1)^2=0$$
$$\Rightarrow \sin\theta=1$$
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow (1)^2+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \cos^2\theta=0 \Rightarrow \cos\theta=0$$

83 ځواب)

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2} \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=2$$
$$\Rightarrow 1+2\sin x\cdot\cos x=2$$
$$\Rightarrow \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$
$$\begin{cases} S=\sin x+\cos x=\sqrt{2} \\ P=\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\end{cases}$$
$$Z^2-SZ+P=0 \Rightarrow Z^2-\sqrt{2}Z+\frac{1}{2}=0$$
$$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{2}$$

$$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow \tan x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow \tan x=1$$

84 ځواب)

$$p=\sin 15°\cdot\cos 15°=\frac{1}{4}$$

$$\sin^2 15°+\cos^2 15°=1\Rightarrow(\sin 15°+\cos 15°)^2-2\sin 15°\cdot\cos 15°=1$$

$$\Rightarrow(\sin 15°+\cos 15°)^2=1+2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow(\sin 15°+\cos 15°)^2=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 15°+\cos 15°=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases}P=\sin 15°\cdot\cos 15°=\frac{1}{4}\\ S=\sin 15°+\cos 15°=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$Z^2-SZ+P=0\Rightarrow Z^2-\frac{\sqrt{6}}{2}Z+\frac{1}{4}=0$$

$$\Rightarrow 2Z^2-\sqrt{6}Z+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{6-4}}{4}$$

$$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1 = \sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ Z_2 = \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad ; \quad \cos 15 > \sin 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad , \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad , \quad \tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

85 ځواب)

$$\tan x + \cot x = \frac{17}{4} \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x - \frac{17}{4}\tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4\tan^2 x - 17\tan x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4(4)(4)}}{2\times 4}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$\Rightarrow \tan x = 4 \ , \ \frac{1}{4} \quad ; \quad \tan x \geq 4$$

$$\Rightarrow \tan x = 4$$

$$\tan x = 4 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+16} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{16}} = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \text{و} \quad \sin x = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \quad \text{و} \quad \tan x = 4 \quad \text{و} \quad \cot x = \frac{1}{4}$$

86 ځواب)

$$3\cot^2 x - 5\tan x \cdot \cos x = 3\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 5\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x$$

$$= \frac{3(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} - 5\sin x$$

$$= \frac{3}{\sin^2 x} - 3 - 5\sin x$$

87 ځواب)

الف) $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} if\ \sin x = 1 \Rightarrow A = 5 - 3(1) = 2 \\ if\ \sin x = -1 \Rightarrow A = 5 - 3(-1) = 8 \end{cases} \Bigg\rangle \begin{cases} \max(A) = 8 \\ \min(A) = 2 \end{cases}$

ب) $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} if\ \cos x = 1 \Rightarrow B = 3 + 7(1) = 10 \\ if\ \cos x = -1 \Rightarrow B = 3 + 7(-1) = -4 \end{cases} \Bigg\rangle \begin{cases} \max(B) = 10 \\ \min(B) = -4 \end{cases}$

88 ځواب)

$$\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (I)$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$= \left|\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right|$$

$$= \frac{|1-\sin\theta|}{|\cos\theta|} \qquad (II)$$

$(I): -1 \le \sin\theta \le 1 \Rightarrow 1-\sin\theta \ge 0 \Rightarrow |1-\sin\theta| = +(1-\sin\theta)$

ددې لپاره چې د (I) او (II) مساواتو دواړه خواوې صدق وکړي نو بايد $|\cos\theta| = +\cos\theta$ يعنې هغه ناحيه وټاکو چې $\cos\theta > 0$ شي.

د شته معلوماتو په پام کې نيولو سره، که θ ته د مخامخ کمان پای په لومړی يا څلورمه ناحيه کې وي، $\cos\theta > 0$ دی او مساوات صدق کوي.

89 ځواب)

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13} \quad ; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - 9\cos\alpha} = \frac{2\left(\frac{12}{13}\right) - 3\left(\frac{5}{13}\right)}{4\left(\frac{12}{13}\right) - 9\left(\frac{5}{13}\right)} = 3$$

90 ځواب)

د کسر صورت او مخرج پر $\sin\theta \neq 0$ تقسيموو، بيا يې له يوه بله بيلوو:

$$\frac{p\sin\theta - q\sin\theta}{p\cos\theta + q\sin\theta} = \frac{\frac{p\sin\theta}{\sin\theta} - \frac{q\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{p\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{q\sin\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{p-q}{p\cot\theta + q}$$

$$= \frac{p-q}{p\left(\frac{p}{q}\right) + q}$$

$$= \frac{qp - q^2}{p^2 + q^2}$$

91 ځواب)

$$p\cot\theta = \sqrt{q^2 - p^2} \Rightarrow \cot\theta = \frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{1+\cot^2\theta} \quad \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{1+\frac{q^2-p^2}{p^2}}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{p}{q}$$

92 ځواب)

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \quad \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1+\left(\frac{2pq}{p^2-q^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1+\frac{4p^2q^2}{\left(p^2-q^2\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{\left(p^2-q^2\right)^2}{\left(p^2+q^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = 1-\frac{\left(p^2-q^2\right)^2}{\left(p^2+q^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{4p^2q^2}{\left(p^2+q^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{2pq}{p^2+q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \pm\frac{p^2+q^2}{2pq}$$

93 ځواب)

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin B = \sqrt{2}\sin A \qquad (I)$$

$$\frac{\tan B}{\tan A} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B\cdot\cos A}{\sin A\cdot\cos B} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{2}\sin A\right)\cos A}{\sin A\sqrt{1-\sin^2 B}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos A = \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\sin^2 B}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos A = \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\left(\sqrt{2}\sin A\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos A = \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-2\sin^2 A}$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\cos A\right)^2 = \left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-2\sin^2 A}\right)^2$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 A = 3\left(1-2\sin^2 A\right)$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 A = 3-6\sin^2 A$$
$$\Rightarrow 2\left(1-\sin^2 A\right) = 3-6\sin^2 A$$
$$\Rightarrow 4\sin^2 A = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \sin A = \pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} \quad , \qquad 0 < A < 90^\circ$$
$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow A = 30^\circ$$

$$(I): \sin B = \sqrt{2}\sin A \Rightarrow \sin B = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B = 45^\circ$$

94 ځواب)

د جذر د موجوديت شرط : $\Delta' \geq 0 \Rightarrow b'^2 - ac \geq 0$

$$\Rightarrow (-2)^2 - (2\sin\alpha - 1)(4\sin\alpha + 2) \geq 0$$
$$\Rightarrow 4 - 8\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 4\sin\alpha + 2 \geq 0$$
$$\Rightarrow -8\sin^2\alpha + 6 \geq 0$$
$$\Rightarrow \sin^2\alpha \leq \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow -60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$$

95 ځواب)

$$P^2 = P\times P \Rightarrow P^2 = (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$$
$$\Rightarrow P^2 = \left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right)\left(1-\cos^2\gamma\right)$$
$$\Rightarrow P^2 = \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma$$
$$\Rightarrow P = \left|\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\right|$$

96 ځواب)

$$\sin x\cdot\cos x=-\frac{1}{4} => 2\sin x\cos x=-\frac{1}{2}$$
$$=> 1+2\sin x\cos x=1-\frac{1}{2}$$
$$=> 1+2\sin x\cos x=\frac{1}{2}$$
$$=> \left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\right)=\frac{1}{2}$$
$$=> (\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{2}$$
$$=> \sin x+\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=> \sin x+\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

97 ځواب)

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x => \sec^2 x=1+\tan^2 x\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x => \csc^2 x=1+\cot^2 x\end{cases}$$
$$\sqrt{\sec^2 x+\csc^2 x}=\sqrt{\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\cot^2 x\right)}$$
$$=\sqrt{\tan^2 x+2+\cot^2 x}$$
$$=\sqrt{(\tan x+\cot x)^2}$$
$$=\left|\tan x+\cot x\right|$$

که د کمان پای په لومړی یا درېیمه ناحیه کې وي:

$$=\tan x+\cot x$$

98 ځواب)

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x+\cos x+1}$$
$$=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x)^2-1}$$
$$=\frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1}$$

$$= \frac{\sin x \cos x(\sin x + \cos x + 1)}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \equiv a \sin x + b \cos x + c \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$$

99 ځواب)

$$\frac{f(x)}{\cos x} + \frac{f(x)}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \frac{\pi}{4}} + \frac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \quad , \qquad x = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

100 ځواب)

$$\left\{\begin{matrix} \tan x + \cot x = 2a \\ \tan x - \cot x = 2b \end{matrix}\right\rangle 2 \tan x = 2a + 2b \Rightarrow \tan x = a + b$$

$$\tan x + \cot x = 2a \Rightarrow (a+b) + \cot x = 2a \Rightarrow \cot x = a - b$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow (a+b)(a-b) = 1$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 1$$

101 ځواب)

(يادونه) $if \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$\tan^6 x + \cot^6 x = b \Rightarrow (\tan^2 x)^3 + (\cot^2 x)^3 = b$$

$$\Rightarrow (\tan^2 x + \cot^2 x)^3 - 3 \tan^2 x \cdot \cot^2 x (\tan^2 x + \cot^2 x) = b$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a = b$$

102 ځواب)

$$4^{\sin^2 \theta} - 4^{\cos^2 \theta} = \sqrt{2} \Rightarrow 4^{\sin^2 \theta} - 4^{(1-\sin^2 \theta)} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4^{\sin^2 \theta} - \left(4.4^{-\sin^2 \theta}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4^{\sin^2 \theta} - \frac{4}{4^{\sin^2 \theta}} = \sqrt{2} \ ; \qquad 4^{\sin^2 \theta} = y$$

$$=> y-\frac{4}{y}=\sqrt{2}$$

$$=> y^2-\sqrt{2y}-4=0$$

$$=> y=\frac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{2} \qquad ; \qquad 4^{\sin^2\theta}>0 => y>0$$

$$=> y=\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}$$

$$=> y=2\sqrt{2}$$

$$=> 4^{\sin^2\theta}=2\sqrt{2}$$

103 ځواب)

(یادونه $if\ \tan\theta=\frac{a}{b} => \begin{cases}\sin\theta=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\theta=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\Big\rangle\ if\ \tan\theta=\frac{-3}{4} => \begin{cases}\sin\theta=\frac{\pm 3}{\sqrt{9+16}}=\pm\frac{3}{5}\\ \cos\theta=\frac{\pm 4}{\sqrt{9+16}}=\pm\frac{4}{5}\end{cases}$

له دې چې θ په څلورمه ربع کې ده، نو $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

$$\sin\theta=-\frac{3}{5} \quad , \quad \cos\theta=\frac{4}{5} \quad , \quad \cot\theta=\frac{-4}{3}$$

104 ځواب)

د یاد کسر صورت او مخرج پر $\cos\theta$ تقسیموو:

$$\frac{-2\sin\theta+3\cos\theta}{3\sin\theta+5\cos\theta}=\frac{\frac{-2\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{3\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{5\cos\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{-2\tan\theta+3}{3\tan\theta+5}$$

$$=\frac{-2\left(\frac{5}{7}\right)+3}{3\left(\frac{5}{7}\right)+5}$$

$$=\frac{11}{50}$$

105 ځواب)

$$if\ \ 0^\circ<\theta<90^\circ => 0<\cos\theta<1 => 0<\frac{1-m^2}{1+m^2}<1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} > 0 \Rightarrow 1-m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow |m| < 1 \Rightarrow -1 < m < 1 \\ \dfrac{1-m^2}{1+m^2} < 1 \Rightarrow 1-m^2 < 1+m^2 \Rightarrow 1-m^2 < 1 \Rightarrow -2m^2 < 0 \end{cases} \Bigg\rangle -1 < m < 1$$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = 1-\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{(1+m^2)^2-(1-m^2)^2}{(1+m^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{4m^2}{(1+m^2)^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{4m^2}{(1+m^2)^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\left|\frac{2m}{1+m^2}\right| \quad ; \quad 0 < \theta < 90^\circ \ , \ \sin\theta > 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \left|\frac{2m}{1+m^2}\right|$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{2|m|}{1+m^2}$$

$$if \quad -1 < m < 1 \Rightarrow \begin{cases} if \quad 0 < m < 1 \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{2m}{1+m^2} \\ if \quad -1 < m < 0 \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{-2m}{1+m^2} \end{cases}$$

په دواړو حالتونو کې د $\sin\theta$ قيمت مثبت دی.

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\dfrac{1-m^2}{1+m^2}}{\dfrac{2|m|}{1+m^2}} = \frac{1-m^2}{2|m|}$$

ځواب) 106

$$\frac{1}{\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(\tan x-\cot x) = \frac{1}{\sin x\cdot\sqrt{\cos^2 x}}\cdot(\tan x-\cot x)$$

$$= \frac{1}{\sin x\cdot|\cos x|}\cdot(\tan x-\cot x)$$

$$= \frac{1}{\sin x \cos x} \cdot (\tan x - \cot x)$$
$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \cdot (\tan x - \cot x)$$
$$= \left[\frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}\right] \cdot (\tan x - \cot x)$$
$$= (\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x)$$
$$= \tan^2 x - \cot^2 x$$
$$= (1 + \cot^2 x) - \cot^2 x$$
$$= 1$$

107 ځواب)

یادونه) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\tan^4 x + \cot^4 x = (\tan^2 x)^2 + (\cot^2 x)^2$$
$$\Rightarrow \tan^4 x + \cot^4 x = (\tan^2 x + \cot^2 x)^2 - 2\tan^2 x \cdot \cot^2 x$$
$$\Rightarrow \tan^4 x + \cot^4 x = a^2 - 2$$
$$\Rightarrow b = a^2 - 2$$
$$\Rightarrow a^2 = b + 2$$

108 ځواب)

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = 0 \Rightarrow y\cos\alpha = x\sin\alpha$$
$$\Rightarrow y = x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow y = x\tan\alpha$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1 \Rightarrow x\cos\alpha + (x\tan\alpha)\sin\alpha = 1$$
$$\Rightarrow x\cos\alpha + x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = 1$$
$$\Rightarrow x\cos^2\alpha + x\sin^2\alpha = \cos\alpha$$
$$\Rightarrow x(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \cos\alpha$$
$$\Rightarrow x = \cos\alpha$$
$$if \;\; y = x \cdot \tan\alpha \xrightarrow{x=\cos\alpha} y = \cos\alpha \cdot \tan\alpha \Rightarrow y = \sin\alpha$$

109 ځواب)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (1)^2 - 4(\sin\alpha\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$
$$=\left(1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$=\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$=\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^2$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^2}}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$x_1=\frac{-1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{-2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=-\cot\alpha$$

$$x_2=\frac{-1-\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{-2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=-\tan\alpha$$

110 ځواب)

يادونه) ددې لپاره چې رابطه تل صدق وکړي(بايد د مساواتو دواړه لوري د x ټولو قيمتونو سره مساوي وي)، اړينه ده چې مساوات بايد د يوه مطابقت ښکارندويي وکړي.

ددې لپاره بايد د مساواتو دواړو خواوو کې د ورته جملو ضريبونه له يوه بل سره مساوي وي.

$$(a+b\sin x-b\cos x)^2=2(1-\sin x)(1+\cos x)$$
$$\Rightarrow a^2+(b\sin x)^2+(-b\cos x)^2+2a(b\sin x)+2a(-b\cos x)+2(b\sin x)(-b\cos x)$$
$$=2(1+\cos x-\sin x-\sin x\cos x)$$
$$\Rightarrow a^2+b^2\sin^2x+b^2\cos^2x+2ab\sin x-2ab\cos x-2b^2\sin x\cdot\cos x$$
$$=2(1+\cos x-\sin x-\sin x\cos x)$$
$$\Rightarrow a^2+b^2\sin^2x+2ab(\sin x-\cos x)-2b^2\sin x\cos x$$
$$=2-2(\sin x-\cos x)-2\sin x\cos x$$

$$=> \begin{cases} 2ab = -2 => ab = -1 \\ -2b^2 = -2 => b^2 = 1 => \begin{cases} b = 1 => a = -1 \\ b = -1 => a = 1 \end{cases} \end{cases}$$

111 ځواب)

یادونه : $k = 0 => x = \frac{\pi}{6}$

$$k = 1 => \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

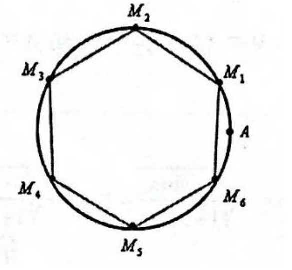
$$k = 2 => x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$k = 3 => x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 4 => x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{6}$$

$$k = 5 => x = \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$k = 6 => x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$$



لیدل کیږي چې د $k = 6$ لپاره د اړونده کمان پای د $k = 0$ قیمت لپاره د اړونده کمان په پای منطبق دی، په همدې توګه لیدل کیږي چې د $k = 7$ لپاره د کمان پای کټ مټ د $k = 1$ لپاره د کمان پای ته ورته دی. . .

د $AB = x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ مثلثاتي کمانونو د لاندنیو نقطو له یو ځای کېدو څخه یوه منظمه محاطي شپږ ضلعي منځته راځي.

112 ځواب)

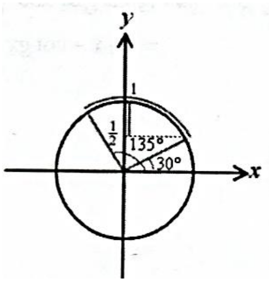
$$-1 \le \cos x \le 1 => -1 \le \frac{2a}{1+a^2} \le 1 => \begin{cases} \frac{2a}{1+a^2} \le 1 \\ \frac{2a}{1+a^2} \ge -1 \end{cases}$$

$if\ \frac{2a}{1+a^2} \le 1 => 2a \le 1 + a^2 => 1 + a^2 - 2a \ge 0 => (1-a)^2 \ge 0$ تل صدق کوي

$if\ \frac{2a}{1+a^2} \ge -1 => 2a \ge -1 - a^2 => a^2 + 2a + 1 \ge 0 => (a+1)^2 \ge 0$ تل صدق کوي

113 ځواب)

$$if \;\; \frac{\pi}{6} \le x < \frac{3\pi}{4} => \frac{1}{2} \le \sin x < 1 => \frac{1}{2} \le 1-2b < 1 => 0 \le b \le \frac{1}{4}$$



114 ځواب)

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{p}$$

$if \quad p \in N => \frac{1}{p} > 0 => \sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0 =>$ (α په لومړی یا درېیمه ربع کې ده)

115 ځواب)

$$\tan x + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \tan x + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x}}$$

$$= \tan x + \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \tan x + \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \tan x + \frac{|1-\sin x|}{|\cos x|}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1-\sin x}{|\cos x|}$$

د مطابقت دویم لوري ته په پام سره، اړینه ده چې $|\cos x| = \cos x$ وي، یعنې د x کمان پای په لومړی یا څلورمه ربع کې وي.

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

116 ځواب)

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}}=\sqrt{\left(1+\cos^2 x\right)+\left(1+\tan^2 x\right)}$$
$$=\sqrt{\tan^2 x+2+\cot^2 x}$$
$$=\sqrt{\left(\tan x+\cot x\right)^2}$$
$$=\left|\tan x+\cot x\right|$$

اړينه ده چې $\left|\tan x+\cot x\right|=+\left(\tan x+\cot x\right)$ وي، يعنې د x کمان پای په لومړي يا درېيمه ربع کې وي.

$$=\tan x+\cot x$$

117 ځواب)

$$\cos x=\sqrt{\frac{\cos x}{a+\cot x}}=\cos x=\sqrt{\frac{\frac{1}{\tan x}}{a+\frac{1}{\tan x}}}=>\cos x=\sqrt{\frac{1}{a\tan+1}}$$
$$=>\cos^2 x=\frac{1}{a\tan x+1}$$
$$=>\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$
$$=>\frac{1}{a\tan x+1}=\frac{1}{1+\tan^2 x}$$
$$=>1+\tan^2 x=a\tan+1$$
$$=>\tan^2 x-a\tan x=0$$
$$=>\tan x\left(\tan x-a\right)=0$$
$$=>\begin{cases}\tan x=0\\ \tan x-a=0=>\tan x=a\end{cases}$$

118 ځواب)

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=>1+\left(\frac{m}{m-1}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2}$$
$$=>1+\left(\frac{m}{m-1}\right)^2=\frac{(m+1)^2}{(m-1)^2}$$
$$=>\frac{(m-1)^2+(m)^2}{(m-1)^2}=\frac{(m+1)^2}{(m-1)^2}$$

$$=> (m-1)^2 + m^2 = (m+1)^2$$
$$=> (m+1)^2 - (m-1)^2 = m^2$$
$$=> 4m = m^2$$
$$=> m^2 - 4m = 0 => \left\{\begin{matrix} m=0 \\ m=4 \end{matrix}\right\rangle m = 4 => \begin{cases} \sin\alpha = \frac{3}{5} \\ \cot\alpha = \frac{4}{3} \end{cases}$$

په لومړی ربع کې دواړه مثلثاتي نسبتونه مثبت دي، نو د α کمان پای په لومړی ربع کې دی.

119 **ځواب)**

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} => \frac{p}{q+1} = \frac{1}{\frac{2}{p-3}}$$
$$=> \frac{p}{q+1} = \frac{p-3}{2}$$
$$=> 2p = (q+1)(p-3)$$
$$=> q = \frac{p+3}{p-3}$$

120 **ځواب)**

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A => \sin A = \frac{4}{5}$$
$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$
$$\cos A + \frac{1}{\sin A} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\frac{4}{5}}$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$$
$$= \frac{8}{4}$$
$$= 2$$

121 **ځواب)**

$$\sin A - \cos A = 0 => \sin A = \cos A$$

که چېرې د دوو کمانونو ساین او کوساین له یوه بل سره مساوي وي، د هغه دوو کمانونو مجموع مساوي په $\frac{\pi}{2}$ کېږي.

$$A+A=\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A=\frac{\pi}{2} \Rightarrow A=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

122 ځواب)

$$\left[\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^2+\left[\cos\theta-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^2$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2$$
$$=\left(\sin^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta\right)+\left(\cos^2\theta-2\cos\theta\cdot\sin\theta+\sin^2\theta\right)$$
$$=\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-2\cos\theta\cdot\sin\theta$$
$$=1+1$$
$$=2$$

123 ځواب)

د دوو مساواتو د دواړو خواوو له جمع څخه لرو چې:

$$\frac{2}{\cos x}=a+b \Rightarrow \frac{1}{\cos x}=\frac{a+b}{2} \qquad (\mathrm{I})$$

(I) د سیستم په لومړی معادله کې وضع کوو:

$$\tan x+\frac{a+b}{2}=a \Rightarrow \tan x=a-\frac{a+b}{2} \Rightarrow \tan x=\frac{a-b}{2} \qquad (\mathrm{II})$$

$$if \quad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1+\left(\frac{a-b^2}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow ab=1$$

پاسنۍ رابطه چې له x څخه په خپلواکه توګه ده، د سیستم ځواب دی.

124 ځواب)

د دوو رابطو له تفریق څخه لرو چې:

$$2\tan x=a-b \Rightarrow \tan x=\frac{a-b}{2} \Rightarrow \cot x=\frac{2}{a-b}$$

$$\tan x+\frac{1}{\sin x}=a \Rightarrow \frac{a-b}{2}+\frac{1}{\sin x}=a \Rightarrow \frac{1}{\sin x}=a-\frac{a-b}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin x}=\frac{a+b}{2}$$

$$if \quad 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} => 1+\left(\frac{2}{a-b}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

125 ځواب)

$$\tan^2 x + \cot^2 x = a => \left(\tan^2 x + \cot^2 x\right)^2 = a^2$$
$$=> \tan^4 x + \cot^4 x + 2\tan^2 x \cdot \cot^2 x = a^2$$
$$=> \underbrace{\tan^4 x + \cot^4 x}_{b} + 2 = a^2$$
$$=> b + 2 = a^2$$
$$=> a^2 - 2 = b$$

پاسنۍ رابطه له x څخه خپلواکه ده.

126 ځواب)

$$\begin{cases} a\cos\theta + b\sin\theta = c \\ a'\cos\theta + b'\sin\theta = c' \end{cases} \Bigg\rangle \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{a'c - ac'}{ba' = b'a} \\ \cos\theta = \dfrac{bc' - b'c}{ba' - b'a} \end{cases}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 => \left(\frac{a'c - ac'}{ba' - b'a}\right)^2 + \left(\frac{bc' - b'c}{ba' - b'a}\right)^2 = 1$$
$$=> \left(ba' - b'a\right)^2 = \left(a'c - ac'\right)^2 + \left(ac' - b'c\right)^2$$

127 ځواب)

$$\tan\theta = c => \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = c => \sin\theta = c\cdot\cos\theta \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 => \frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{c\cos\theta} = a^2 - b^2$$
$$=> \frac{cax - by}{c\cos\theta} = a^2 - b^2$$
$$=> c\cdot\cos\theta = \frac{cax - by}{a^2 - b^2}$$
$$=> \cos\theta = \frac{cax - by}{c\left(a^2 - b^2\right)} \quad ; \quad \sin\theta = c\cdot\cos\theta$$
$$=> \sin\theta = \frac{cax - by}{a^2 + b^2}$$

$$if \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 => \left(\frac{cax - by}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left[\frac{cax - by}{c\left(a^2 - b^2\right)}\right]^2 = 1$$

128 ځواب)

$$\sec^2\theta+\cos^2\theta=\frac{2b}{y}\Rightarrow\frac{2b}{y}=\sec^2\theta+\frac{1}{\sec^2\theta}$$

$$\Rightarrow\frac{2b}{y}=\frac{\sec^4\theta+1}{\sec^2\theta}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{y}=\frac{\sec^4\theta+1}{2\sec^2\theta}$$

$$\Rightarrow\frac{y}{b}=\frac{2\sec^2\theta}{\sec^4\theta+1}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{\sec^2\theta-1}{\sec^4\theta+1}\right)^2+\left(\frac{2\sec^2\theta}{\sec^4\theta+1}\right)^2\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\left(\sec^4\theta+1\right)^2}{\left(\sec^4\theta+1\right)^2}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

129 ځواب)

د راکړل شوې رابطې دواړه خواوې د 2 په توان رفع او بيا يې له يوه بل سره جمع کوو:

$$\begin{cases}a\sin x+b\cos x=2c\\ b\sin x-a\cos x=c\end{cases}\Big\rangle\begin{cases}(a\sin x+b\cos x)^2=4c^2\\ (b\sin x-a\cos x)^2=c^2\end{cases}\Big\rangle\times$$

$$\times\begin{cases}a^2\sin^2x+b^2\cos^2x+2ab\sin x\cos x=4c^2\\ b^2\sin^2x+a^2\cos^2x-2ab\sin x\cos x=c^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2\sin^2x+b^2\cos^2x+b^2\sin^2x+a^2\cos^2x=5c^2$$

$$\Rightarrow\sin^2x\left(a^2+b^2\right)+\cos^2x\left(b^2+a^2\right)=5c^2$$

$$\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)\underbrace{\left(\sin^2x+\cos^2x\right)}_{1}=5c^2$$

$$\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)=5c^2$$

130 ځواب)

$$\sin(-60^\circ)=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt3}{2}\qquad\cos(-60^\circ)=\cos60^\circ=\frac12$$

$$\tan(-60^\circ)=-\tan60^\circ=-\sqrt3\qquad\cot(-60^\circ)=-\cot60^\circ=-\frac{\sqrt3}{3}$$

131 ځواب)

$$\sin135^\circ=\sin(\pi-45^\circ)=\sin45^\circ=\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\cos135^\circ=\cos(\pi-45^\circ)=-\cot45^\circ=-\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \tan(\pi - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

132 ځواب)

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\left[-\frac{3\pi}{4}\right] = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left[-\frac{3\pi}{4}\right] = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1 \qquad \tan\left[-\frac{3\pi}{4}\right] = -\tan\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1$$

$$\cot\frac{3\pi}{4} = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1 \qquad \cot\left[-\frac{3\pi}{4}\right] = -\cot\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1$$

133 ځواب)

$$\sin 240^\circ = \sin(\pi + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(\pi + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \tan(\pi + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 240^\circ = \cot(\pi + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

134 ځواب)

$$\sin 330^\circ = \sin(2\pi - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos(2\pi - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330^\circ = \tan(2\pi - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 330^\circ = \cot(2\pi - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

135 ځواب)

$$\tan\left(-\frac{35\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{35\pi}{6}\right) = -\tan\left[\frac{(36-1)\pi}{6}\right] =$$

$$= -\tan\left(6\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

136 ځواب)

$$\cos\left(-\frac{55\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{55\pi}{4}\right)=\cos\left[\frac{(56-1)\pi}{4}\right]=$$

$$=\cos\left[\frac{56\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left[14\pi-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left[-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left[\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

137 ځواب)

$$\sin\left(\frac{89\pi}{6}\right)=\sin\left[\frac{(90-1)\pi}{6}\right]=\sin\left(15\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

138 ځواب)

$$\cos\left(\frac{51\pi}{4}\right)=\cos\left[\frac{(52-1)\pi}{4}\right]=\cos\left(13\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

139 ځواب)

$$\tan\left(\frac{67\pi}{6}\right)=\tan\left[\frac{(66+1)\pi}{6}\right]=\tan\left(11\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

140 ځواب)

$$\cot\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\cot\left[\frac{(15-1)\pi}{3}\right]=\cot\left(5\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cot\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

141 ځواب)

$$\sin\left(\frac{55\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{(54-1)\pi}{3}\right]=\sin\left(18\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

142 ځواب)

$$\cot(1470^\circ)=\cot(4\times 360+30)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

143 ځواب)

$$\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\tan\left[\frac{(12-1)\pi}{6}\right]=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

144 ځواب)

$$\cos\left(-\frac{49\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{49\pi}{6}\right)=\cos\left[\frac{(48-1)\pi}{6}\right]=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

145 ځواب)

$$\sin(-15\pi)=-\sin 15\pi=-\sin(14\pi+\pi)=-\sin\pi=0$$

146 ځواب)

$$\cot\left(-\frac{9\pi}{2}\right)=-\cot\left(\frac{9\pi}{2}\right)=-\cot\left[\frac{(8+1)\pi}{2}\right]=-\cot\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\frac{\pi}{2}=0$$

147 ځواب)

$$\sin\left(997\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

148 ځواب)

$$\cos\left(800\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

149 ځواب)

$$\cos\left(\frac{-125\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{125\pi}{4}\right)=\cos\left(31\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{125\pi}{4}\right)=\tan\left(31\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\cot\left(\frac{-125\pi}{4}\right)=-\cot\left(\frac{125\pi}{4}\right)=-\cot\left(31\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}2\cos\left(\frac{-125\pi}{4}\right)+3\tan\left(\frac{125\pi}{4}\right)+4\cot\left(\frac{-125\pi}{4}\right)&=-2\cos\frac{\pi}{4}+3\tan\frac{\pi}{4}-4\cot\frac{\pi}{4}\\&=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3(1)-4(1)\\&=-\sqrt{2}+3-4\\&=-\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

150 ځواب)

$$\tan 89^\circ=\cot 1^\circ$$

$$\tan 88^\circ=\cot 2^\circ$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\log(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ)&=\log(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 45^\circ\cdots\cot 2^\circ\cot 1^\circ)\\&=\log(\tan 45^\circ)\\&=\log(1)\\&=0\end{aligned}$$

151 ځواب)

$$\sin(\alpha-270^\circ)=\sin[-(270^\circ-\alpha)]=-\sin(270^\circ-\alpha)=-(-\cos\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(360-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha-90)=\tan[-(90-\alpha)]=-\tan(90-\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\cos(\alpha-270)=\cos[-(270-\alpha)]=\cos(270-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\frac{\sin^3(\alpha-270)\cdot\cos(360-\alpha)}{\tan^3(\alpha-90)\cdot\cos^3(\alpha-270)}=\frac{\cos^3\alpha\cdot\cos\alpha}{(-\cot\alpha)^3\cdot(-\sin\alpha)^3}$$
$$=\frac{\cos^3\alpha\cdot\cos\alpha}{-\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot(-\sin^3\alpha)}$$
$$=\cos\alpha$$

152 ځواب)

$$\tan 89^\circ=\cot 1^\circ$$
$$\tan 88^\circ=\cot 2^\circ$$
$$\vdots$$
$$\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdots\tan 88^\circ\cdot\tan 89$$
$$=(\tan 1^\circ\cdot\cot 1^\circ)(\tan 2^\circ\cdot\cot 2^\circ)\cdots(\tan 44^\circ\cdot\cot 44^\circ)\cdot\tan 45^\circ$$
$$=1\times 1\times\cdots\times 1\times 1$$
$$=1$$

153 ځواب)

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 135^\circ=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$$
$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
$$\sin 120^\circ\cdot\tan 135^\circ\cdot\cos 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

154 ځواب)

$$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$$
$$\cot(315^\circ)=\cot(270^\circ+45^\circ)=-\tan+5^\circ=-1$$
$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
$$\tan 225^\circ\cdot\cot 315^\circ\cdot\cos 60^\circ=(1)(-1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

155 ځواب)

$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 225^\circ \times \sin 420^\circ + \cos 390^\circ = (1)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3}$$

156 ځواب)

$$\tan 130^\circ = \tan(90^\circ + 40^\circ) = -\cot 40^\circ$$
$$\tan 230^\circ = \tan(270 - 40^\circ) = \cot 40^\circ$$
$$\cot 140^\circ = \cot(180^\circ - 40^\circ) = -\cot 40^\circ$$
$$\tan 310^\circ = \tan(270^\circ + 40^\circ) = -\cot 40^\circ$$
$$\tan 50^\circ = \tan(90^\circ - 40^\circ) = \cot 40^\circ$$
$$\cot 40^\circ + 3\tan 130^\circ - \tan 230^\circ - 2\cot 140^\circ - 4\tan 310^\circ - \tan 50^\circ$$
$$= \cot 40^\circ + 3(-\cot 40^\circ) - \cot 40^\circ - 2(-\cot 40^\circ) - 4(-\cot 40^\circ) - \cot 40^\circ$$
$$= \cot 40^\circ - 3\cot 40^\circ - \cot 40^\circ + 2\cot 40^\circ + 4\cot 40^\circ - \cot 40^\circ$$
$$= 2\cot 40^\circ$$

157 ځواب)

$$\sin(\pi - \alpha)\cdot\sin(2\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos^2(\pi + \alpha)$$

$$= \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) + (-\cos\alpha)^2$$

$$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}$$

158 ځواب)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$
$$\sin(x-\pi)=\sin[-(\pi-x)]=-\sin(\pi-x)=-\sin x$$
$$\cos(x-2\pi)=\cos[-(2\pi-x)]=\cos(2\pi-x)=\cos x$$
$$\tan(-x)=-\tan x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$$
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(x-\pi)\cdot\cos(x-2\pi)+\tan(-x)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\ =(\cos x)(\sin x)+(-\sin x)\cdot(\cos x)+(-\tan x)(-\cot x)\\ =\sin x\cdot\cos x-\sin x\cos x+\tan x\cdot\cot x\\ =1\end{aligned}$$

159 ځواب)

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left[\frac{(6+1)\pi}{6}\right]=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left[\frac{(4+1)\pi}{4}\right]=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$
$$\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cot\left[\frac{(8-1)\pi}{4}\right]=\cot\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$
$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left[\frac{(6-1)\pi}{3}\right]=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)&=\left(-\frac{1}{2}\right)(1)+(-1)\left(\frac{1}{2}\right)\\ &=-1\\ &=\cos 180^\circ\end{aligned}$$

160 ځواب)

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$$
$$\sin(\pi-x)=\sin x$$
$$\tan(90^\circ+x)=-\cot x$$
$$\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}+\frac{\sin(\pi-x)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}\cdot\tan(90^\circ+x)=\frac{1}{-\cos x}+\frac{\sin x}{-\cos x}\cdot(-\cot x)$$

$$= \frac{1}{-\cos x} - (\tan x)(-\cot x)$$
$$= \frac{1}{-\cos x} + 1$$
$$= 1 - \frac{1}{\cos x}$$

161 ځواب)

$$\sin\frac{49\pi}{10} = \sin\left(5\pi - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10}$$
$$\sin\frac{7\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$$
$$\sin\frac{18\pi}{5} = \sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$$
$$\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{5}$$
$$\cos\frac{13\pi}{5} = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{5}$$
$$\sin\frac{19\pi}{10} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{10}\right) = -\sin\frac{\pi}{10}$$

$$A = \frac{\sin\frac{49\pi}{b} - \sin\frac{7\pi}{5} + \sin\frac{18\pi}{5} + 3\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) + 2\cos\frac{13\pi}{5} - \sin\frac{19\pi}{10}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5} + 3\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{3\pi}{5} + 2\cos\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{10}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{10} + 3\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{10} + 3\cos\frac{3\pi}{5}}$$
$$= 1$$

162 ځواب)

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = -\cos a$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}-a\right)=-\cos a$$

$$\sin(5\pi-a)=\sin(\pi-a)=\sin a$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cot a$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)}+\frac{\sin(5\pi-a)}{\sin\left(\frac{7\pi}{2}-a\right)}\cdot\tan\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\frac{1}{-\cos a}+\frac{\sin a}{-\cos a}\cdot(-\cot a)$$

$$=\frac{1}{-\cos a}+\tan a\cdot\cot a$$

$$=1-\frac{1}{\cos a}$$

163 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A=\pi-(B+C)$$
$$\Rightarrow \sin A=\sin[\pi-(B+C)]$$
$$\Rightarrow \sin A=\sin B+C$$

164 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$$
$$\Rightarrow \cos(A+B)=\cos(\pi-C)$$
$$\Rightarrow \cos(A+B)=-\cos C$$

165 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow C=\pi-(A+B)$$
$$\Rightarrow \tan C=\tan[\pi-(A+B)]$$
$$\Rightarrow \tan C=-\tan(A+B)$$

166 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A=\pi-(B+C)$$
$$\Rightarrow \frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{(B+C)}{2}$$
$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(B+C)}{2}\right]$$
$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$$

167 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow C=\pi-(A+B)$$

$$\Rightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{(A+B)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{C}{2}=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(A+B)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$$

168 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A=\pi-(B+C)$$

$$\Rightarrow 2A=2\pi-(2B+2C)$$

$$\Rightarrow \sin 2A=\sin[2\pi-(2B+2C)]$$

$$\Rightarrow \sin 2A=-\sin(2B+2C)$$

169 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A=\pi-(B+C)$$

$$\Rightarrow \frac{3A}{2}=\frac{3\pi}{2}-\left(\frac{3B}{2}+\frac{3C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{3A}{2}=\tan\left[\frac{3\pi}{2}-\left(\frac{3B}{2}+\frac{3C}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \tan\frac{3A}{2}=\cot\left(\frac{3B}{2}+\frac{3C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{3A}{2}=\cot\frac{3B+3C}{2}$$

170 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{A}{2}+B+C=\pi$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2}+B=\pi-\left(\frac{A}{2}+C\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{A}{2}+C\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)$$

171 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$=> \frac{A}{2}+\left(B-\frac{B}{2}\right)+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$=> B+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}+\frac{B}{2}$$

$$=> B+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{C-B}{2}\right)$$

$$=> \sin\left(B+\frac{A}{2}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{C-B}{2}\right)\right]$$

$$=> \sin\left(B+\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{C-B}{2}$$

172 ځواب)

$$\tan 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\sin 135^\circ=\sin(\pi-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 240^\circ=\tan(\pi+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\tan^2 45^\circ-\cos^2 120^\circ=x\sin 135^\circ\cdot\cos 45^\circ\cdot\tan 240^\circ$$

$$=> \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)$$

$$=> x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

173 ځواب)

$$\sin 145^\circ=\sin(\pi-35^\circ)=\sin 35^\circ$$

$$\sin 235^\circ=\sin(270^\circ-35^\circ)=-\cos 35^\circ$$

$$\cos 325^\circ=\cos(360^\circ-35^\circ)=\cos 35^\circ$$

$$\frac{\sin 145^\circ-\sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}=\frac{\sin 35^\circ\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}$$

$$=\tan 35^\circ+1$$

$$= (2a-1)+1$$
$$= 2a$$

174 ځواب)

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$
$$\cos 195^\circ = \cos(180^\circ + 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$
$$\sin 435^\circ = \sin(360^\circ + 75^\circ) = \sin 75^\circ = \cos 15^\circ$$
$$\sin 345 = \sin(360^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$
$$\frac{\cos 105^\circ - 3\cos 195^\circ}{3\sin 435^\circ + 2\sin 345^\circ} = \frac{-\sin 15^\circ + 3\cos 15^\circ}{3\cos 15^\circ - 2\sin 15^\circ}$$
$$= \frac{-\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \dfrac{3\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\dfrac{3\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \dfrac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}$$
$$= \frac{-\tan 15^\circ + 3}{3 - 2\tan 15^\circ}$$
$$= \frac{-(2-\sqrt{3})+3}{3-2(2-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1} \cdot \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}+1}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3})(2\sqrt{3}+1)}{11}$$
$$= \frac{7+3\sqrt{3}}{11}$$

175 ځواب)

$$\cos(\alpha - \pi) = \cos[-(\pi - \alpha)] = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$
$$\cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cot\left[-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right] = -\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\tan\alpha$$
$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$A=\cos(\alpha-\pi)+2\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cot\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=-\cos\alpha-2\cot\alpha+\tan\alpha+\cos\alpha$$
$$=\tan\alpha-2\cot\alpha$$
$$=(1)-2(1)$$
$$=-1$$

176 ځواب)

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos 2x+\cos 3x\cdot\sin 2x}{\cos 3x\cdot\cos 2x-\sin 3x\cdot\sin 2x}=\frac{\sin(3x+2x)}{\cos(3x+2x)}=\frac{\sin 5x}{\cos 5x}=\tan 5x$$

177 ځواب)

$$\frac{\sin 7x\cdot\cos x-\cos 7x\cdot\sin x}{\cos 9x\cdot\cos 3x+\sin 9x\cdot\sin 3x}=\frac{\sin(7x-x)}{\cos(9x-3x)}=\frac{\sin 6x}{\cos 6x}=\tan 6x$$

178 ځواب)

$$\sin(3\alpha-2\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)+\cos(3\alpha-2\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\sin[(3\alpha-2\beta)+(\alpha+\beta)]$$
$$=\sin(4\alpha-\beta)$$

179 ځواب)

$$\sin(5\alpha+3\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)-\cos(5\alpha+3\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\sin[(5\alpha+3\beta)-(\alpha+\beta)]$$
$$=\sin(4\alpha+2\beta)$$
$$=\sin 2(2\alpha+\beta)$$

180 ځواب)

$$\cos(7x-8y)\cdot\cos(3x+3y)-\sin(7x+8y)\cdot\sin(3x+3y)$$
$$=\cos[(7x-8y)+(3x+3y)]$$
$$=\cos(10x-5y)$$
$$=\cos 5(2x-y)$$

181 ځواب)

$$\cos\frac{3x-y}{2}\cdot\cos\frac{x-3y}{2}+\sin\frac{3x-y}{2}\cdot\sin\frac{x-3y}{2}=\cos\left[\frac{3x-y}{2}-\frac{x-3y}{2}\right]$$

$$=\cos\frac{2x+2y}{2}$$

$$=\cos(x+y)$$

182 ځواب)

يادونه) $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{8}+x\right)}=\tan\left[\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]$$

$$=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$=1$$

183 ځواب)

يادونه) $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$

$$\frac{\tan\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)\cdot\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\tan\left[\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$=-\cot x$$

184 ځواب)

يادونه) $\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b-1}{\cot b+\cot a}$

$$\frac{\cot 3x\cdot\cot 2x-1}{\cot 2x+\cos 3x}=\cot(3x+2x)$$

$$=\cot 5x$$

$$=\frac{1}{\tan 5x}$$

185 ځواب)

(یادونه) $\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cot b+1}{\cot b-\cot a}$

$$\frac{\cot\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1}{\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cot\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)}=\cot\left[\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\cot 3x$$

186 ځواب)

$$2\cos(45+\alpha)\cos(45-\alpha)=2(\cos 45\cos\alpha-\sin 45\sin\alpha)(\cos 45\cos\alpha+\sin 45\sin\alpha)$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

187 ځواب)

$$\cos 2\alpha(1+\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha)=\cos 2\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)$$
$$=\cos 2\alpha\left(\frac{\cos\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}\right)$$
$$=\cos 2\alpha\left[\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha\cos 2\alpha}\right]$$
$$=\cos 2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}$$
$$=1$$

188 ځواب)

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=$$
$$=\cos\alpha+\left(\cos\alpha\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\alpha\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)+\left(\cos\alpha\cdot\cos\frac{4\pi}{3}-\sin\alpha\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\alpha+\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)-\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)-\sin\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \cos\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$
$$= 0$$

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

189 ځواب)

$$(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \sin 3\alpha$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$$
$$= (\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha) - (\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha) + \sin 3\alpha$$
$$= \cos(2\alpha - \alpha) - \sin(2\alpha + \alpha) + \sin 3\alpha$$
$$= \cos\alpha - \sin 3\alpha + \sin 3\alpha$$
$$= \cos\alpha$$

190 ځواب)

$$\frac{\tan(45^\circ - \alpha)}{\tan(45^\circ + \alpha)} = \frac{\frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos(45^\circ - \alpha)}}{\frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha)}}$$
$$= \frac{\sin(45^\circ - \alpha) \cdot \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) \cdot \cos(45^\circ - \alpha)}$$
$$= \frac{(\sin 45^\circ \cos\alpha - \cos 45^\circ \sin\alpha)(\cos 45^\circ \cos\alpha - \sin 45^\circ \sin\alpha)}{(\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha)(\cos 45^\circ \cos\alpha + \sin 45^\circ \sin\alpha)}$$
$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}$$

$$=\frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\right]^2}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right]^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\right)}$$

$$=\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

191 ځواب)

$$3\alpha=2\alpha+\alpha \Rightarrow \tan 3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha=\frac{\tan 2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha(1-\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha)=\tan 2\alpha+\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha-\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha\cdot\tan 3\alpha=\tan 2\alpha+\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha\cdot\tan 2\alpha\cdot\tan 3\alpha=\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha$$

192 ځواب)

$$17^\circ+43^\circ=60^\circ \Rightarrow \tan(17^\circ+43^\circ)=\tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 17^\circ+\tan 43^\circ}{1-\tan 17^\circ\tan 43^\circ}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 17^\circ+\tan 43^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 17^\circ\tan 43^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 17^\circ+\tan 43^\circ+\sqrt{3}\tan 17^\circ\tan 43^\circ=\sqrt{3}$$

193 ځواب)

$$80^\circ+55^\circ=135^\circ \Rightarrow \tan(80^\circ+55^\circ)=\tan 135^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(80^\circ+55^\circ)=\tan(180^\circ-45^\circ)$$

$$\Rightarrow \tan(80^\circ+55^\circ)=-\tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(80^\circ+55^\circ)=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 80^\circ+\tan 55^\circ}{1-\tan 80^\circ\tan 55^\circ}=-1$$

$$\Rightarrow \tan 80^\circ+\tan 55^\circ=-1+\tan 80^\circ\tan 55^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 80^\circ+\tan 55^\circ-\tan 80^\circ\tan 55^\circ=-1$$

$$\Rightarrow \tan 80^\circ+\cot 35^\circ-\tan 80^\circ\tan 55^\circ=-1$$

194 ځواب)

$$\frac{\cos 3a+\sin a\sin 2a}{\sin 3a-\sin 2a\cos a}=\frac{\cos(a+2a)+\sin a\sin 2a}{\sin(a+2a)-\sin 2a\cos a}$$
$$=\frac{\cos a\cos 2a-\sin a\sin 2a+\sin a\sin 2a}{\sin a\cos 2a+\cos a\sin 2a-\sin 2a\cos a}$$
$$=\frac{\cos a\cos 2a}{\sin a\cdot\cos 2a}$$
$$=\cot a$$

195 ځواب)

$$\frac{\cos 20^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{\cos 20^\circ+\tan 60^\circ\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ+\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$$
$$=\frac{\dfrac{\cos 20^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\sin 20}{\cos 60^\circ}}{\cos 40^\circ}$$
$$=\frac{\cos 20^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\sin 20^\circ}{\cos 60^\circ\cos 40^\circ}$$
$$=\frac{\cos(60^\circ-20^\circ)}{\dfrac{1}{2}\cos 40^\circ}$$
$$=\frac{\cos 40^\circ}{\dfrac{1}{2}\cos 40^\circ}$$
$$=2$$

196 ځواب)

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$$
$$=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

197 ځواب)

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

198 ځواب)

$$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ)$$
$$= -\sin 15^\circ$$
$$= -\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

199 ځواب)

$$\cos 175^\circ \cos 50^\circ - \sin 175^\circ \sin 50^\circ = \cos(175^\circ + 50^\circ)$$
$$= \cos 225^\circ$$
$$= \cos(180^\circ + 45^\circ)$$
$$= -\cos 45^\circ$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

200 ځواب)

$$\frac{\cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b}{\sin(a+b)\cos b - \cos(a+b)\sin b} = \frac{\cos[(a+b)-b]}{\sin[(a+b)-b]}$$
$$= \frac{\cos a}{\sin a}$$
$$= \cot a$$

201 ځواب)

$$1 + \tan 2x \cdot \tan x = 1 + \frac{\sin 2x \sin x}{\cos 2x \cos x}$$
$$= \frac{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}{\cos 2x \cos x}$$
$$= \frac{\cos(2x - x)}{\cos 2x \cos x}$$
$$= \frac{\cos x}{\cos 2x \cos x}$$
$$= \frac{1}{\cos 2x}$$

$$= \sec 2x$$

202 ځواب)

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta - \sin\theta)(\cos 2\theta - \sin 2\theta) + \sin 3\theta \\
&= \cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta\sin 2\theta - \sin\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta + \sin 3\theta \\
&= (\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) - (\sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta) + \sin 3\theta \\
&= \cos(2\theta - \theta) - \sin(2\theta + \theta) + \sin 3\theta \\
&= \cos\theta - \sin 3\theta + \sin 3\theta \\
&= \cos\theta
\end{aligned}$$

203 ځواب)

$$\cos 22^\circ = \sin 68^\circ \qquad \cos 20^\circ = \sin 70^\circ$$

$$\cos 82^\circ = \sin 8^\circ \qquad \cos 80^\circ = \sin 10^\circ$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ + \cos 80^\circ\cos 20^\circ}{\cos 68^\circ\cos 8^\circ + \cos 82^\circ\cos 22^\circ} &= \frac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ + \sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\cos 68\cos 8^\circ + \sin 8^\circ\sin 68^\circ} \\
&= \frac{\cos(70^\circ - 10^\circ)}{\cos(68^\circ - 8^\circ)} \\
&= \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} \\
&= 1
\end{aligned}$$

204 ځواب)

$$\begin{aligned}
3\sin 70^\circ + \sqrt{3}\cos 70^\circ &= 3\left(\sin 70^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 70^\circ\right) \\
&= 3(\sin 70^\circ + \tan 30^\circ\cos 70^\circ) \\
&= 3\left(\sin 70^\circ + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\cdot\cos 70^\circ\right) \\
&= 3\left(\frac{\sin 70^\circ\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 70^\circ}{\cos 30^\circ}\right) \\
&= \frac{3}{\cos 30}\sin(70^\circ + 30^\circ) \\
&= 2\sqrt{3}\sin 100^\circ \\
&= 2\sqrt{3}\sin(90^\circ + 10^\circ) \\
&= 2\sqrt{3}\cos 10^\circ
\end{aligned}$$

205 ځواب)

$$\frac{1+\tan 25^\circ}{1-\tan 25^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 25^\circ}{1-\underbrace{\tan 45^\circ}_{1}\tan 25^\circ}$$
$$=\tan\left(45^\circ+25^\circ\right)$$
$$=\tan 70^\circ$$

206 ځواب)

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1}$$
$$=2-\sqrt{3}$$

207 ځواب)

$$\tan\left(a+b\right)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}\Rightarrow\cot\left(a+b\right)=\frac{1-\tan a\cdot\tan b}{\tan a+\tan b}$$
$$\frac{1-\tan\left(17^\circ,20'\right)\cdot\tan\left(27^\circ,40'\right)}{\tan\left(17^\circ,20'\right)+\tan\left(27^\circ,40'\right)}=\cot\left[\left(17^\circ,20'\right)+\left(27^\circ,40'\right)\right]$$
$$=\cot 45^\circ$$
$$=1$$

208 ځواب)

$$\sin\left(a+b+c\right)=\sin\left[\left(a+b\right)+c\right]$$
$$=\sin\left(a+b\right)\cos c+\cos\left(a+b\right)\sin c$$
$$=\left(\sin a\cdot\cos b+\cos a\ \sin b\right)\cos c+\left(\cos a\cdot\cos b-\sin a\sin b\right)\sin c$$
$$=\sin a\cdot\cos b\cos c+\sin b\cos a\cos c+\sin c\cos a\cos b-\sin a\sin b\sin c$$

209 ځواب)

$$\cos\left(a-b-c\right)=\cos\left[a-\left(b+c\right)\right]$$

$$= \cos a \cdot \cos(b+c) + \sin a \cdot \sin(b+c)$$
$$= \cos a(\cos b \cos c - \sin b \cdot \sin c) + \sin a(\sin b \cos c + \sin c \cdot \cos b)$$
$$= \cos a \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos c + \sin a \sin c \cos b - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos a$$

210 ځواب)

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi - C$$
$$\Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$
$$\Rightarrow \cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} - 1}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}} = \tan\frac{C}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} - 1}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}} = \frac{1}{\cot\frac{C}{2}}$$
$$\Rightarrow \cot\frac{C}{2}\left(\cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} - 1\right) = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}$$
$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} - \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}$$
$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2}$$

211 ځواب)

$$\tan(\alpha+\theta) = m \tan(\alpha-\theta) \Rightarrow \frac{\tan(\alpha+\theta)}{\tan(\alpha-\theta)} = m$$
$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta)}{\cos(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)} = m$$

په صورت کې نسبت تفصيل او په مخرج کې د نسبت ترکيب کوو:

$$\Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)} = \frac{m-1}{m+1}$$
$$\Rightarrow \frac{\sin[(\alpha+\theta)-(\alpha-\theta)]}{\sin[(\alpha+\theta)+(\alpha-\theta)]} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$=> \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}=\frac{m-1}{m+1}$$

212 ځواب)

$$\cos(\alpha-\beta)= p\sin(\alpha+\beta) => \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}= p$$

په صورت کې د نسبت ترکیب او په مخرج کې د نسبت تفصیل کوو

$$=> \frac{\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)}=\frac{p+1}{p-1}$$

$$=> \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{p+1}{p-1}$$

$$=> \frac{\cos\alpha(\sin\beta+\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\beta+\cos\beta)}{\sin\alpha(\sin\beta-\cos\beta)-\cos\alpha(\sin\beta-\cos\beta)}=\frac{p+1}{p-1}$$

$$=> \frac{(\sin\beta+\cos\beta)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\sin\beta-\cos\beta)(\sin\alpha-\cos\alpha)}=\frac{p+1}{p-1}$$

$$=> \frac{\sin\beta+\cos\beta}{\sin\beta-\cos\beta}\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{p+1}{p-1}$$

په پاسني مساواتو کې، لومړی او دویم کسر په ترتیب پر $\cos\beta$ او $\cos\alpha$ تقسیموو او لرو چې:

$$=> \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\cos\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\beta}{\cos\beta}}\cdot\frac{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{p+1}{p-1}$$

$$=> \frac{1+\tan\beta}{\tan\beta-1}\cdot\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{p+1}{p-1}$$

$$=> \frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{p+1}{p-1}\cdot\frac{\tan\beta-1}{\tan\beta+1}$$

$$=> \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{p+1}{p-1}\quad\frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}$$

$$=> \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=\frac{p+1}{p-1}\quad\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\beta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\beta}$$

$$=> \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{p+1}{p-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$$

213 ځواب)

$$\cot(a+b)=\frac{\cot a\cdot\cot b-1}{\cot a+\cot b}\Rightarrow\cot(a+b)=\frac{x'x''-1}{x'+x''}$$

$$\Rightarrow\cot(a+b)=\frac{-2-1}{2}$$

$$\Rightarrow\cot(a+b)=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\tan(a+b)=\frac{1}{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow\tan(a+b)=-\frac{2}{3}$$

214 ځواب)

$$\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$$\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\cdot\tan\beta$$

$$\Rightarrow\tan\alpha+\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\beta=1$$

$$\Rightarrow\tan\alpha+\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\beta+1=1+1$$

$$\Rightarrow\tan\alpha(1+\tan\beta)+(1+\tan\beta)=2$$

$$\Rightarrow(1+\tan\beta)(\tan\alpha+1)=2$$

215 ځواب)

$$\tan\frac{2\beta}{3}=\tan\left[\left(2a+\frac{\beta}{3}\right)-\left(2a-\frac{\beta}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\tan\left(2\alpha+\frac{\beta}{3}\right)-\tan\left(2\alpha-\frac{\beta}{3}\right)}{1+\tan\left(2\alpha+\frac{\beta}{3}\right)\cdot\tan\left(2\alpha-\frac{\beta}{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

216 ځواب)

$$if \quad B = 45° \Rightarrow A + C = 135°$$

$$\Rightarrow \cot(A+C) = \cot 135°$$

$$\Rightarrow \frac{\cot A \cdot \cot C - 1}{\cot A + \cot C} = -1$$

$$\Rightarrow \cot A \cdot \cot C - 1 = -\cot A - \cot C$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot C + \cot A \cdot \cot C = 1$$

دواړو خواوو ته 1 واحد اضافه کوو:

$$\Rightarrow 1 + \cot A + \cot C + \cot A \cdot \cot C = 2$$

$$\Rightarrow (1+\cot A) + \cot C(1+\cot A) = 2$$

$$\Rightarrow (1+\cot A)(1+\cot C) = 2$$

217 ځواب)

$$\sin A = 2\sin(B-C) \Rightarrow \sin(B+C) = 2\sin(B-C)$$

$$\Rightarrow \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C = 2\sin B \cdot \cos C - 2\cos B \cdot \sin C$$

$$\Rightarrow 3\sin C \cdot \cos B = \sin B \cdot \cos C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3\sin C}{\cos C}$$

$$\Rightarrow \tan B = 3\tan C$$

218 ځواب)

یادونه) $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$

$$\sin^2(45° + \alpha) - \sin^2(45° - \alpha) = \sin[(45° + \alpha) + (45° - \alpha)] \cdot \sin[(45° + \alpha) - (45° - a)]$$

$$= \underbrace{\sin 90°}_{1} \cdot \sin 2\alpha$$

$$= \sin 2\alpha$$

219 ځواب)

فرض : $\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \beta - \gamma = y \\ \gamma - \alpha = z \end{cases}$

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

$$\Rightarrow x + y = -z$$

$$\Rightarrow \tan(x+y)=\tan(-z)$$
$$\Rightarrow \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=-\tan z$$
$$\Rightarrow \tan x+\tan y=-\tan z(1-\tan x\tan y)$$
$$\Rightarrow \tan x+\tan y+\tan z=\tan x\tan y\tan z$$
$$\Rightarrow \tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$$

ځواب) 220

(يادونه $\sin x\cdot\cos x=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}$

ځواب) 221

(يادونه $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan(45^\circ-\alpha)$

$$\frac{1-\tan 20^\circ}{1+\tan 20^\circ}=\tan(45^\circ-20^\circ)$$
$$=\tan 25^\circ$$

ځواب) 222

(يادونه $\begin{cases}\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan(45^\circ-\alpha)\\ \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan(45^\circ+\alpha)\\ \\ \cot a-\tan\alpha=2\cot 2\alpha\end{cases}$

$$\frac{1+\tan 25^\circ}{1-\tan 25^\circ}-\frac{1-\tan 25^\circ}{1+\tan 25^\circ}=\tan(45^\circ+25^\circ)-\tan(45^\circ-25^\circ)$$
$$=\tan 70^\circ-\tan 20^\circ$$
$$=\cot 20^\circ-\tan 20^\circ$$
$$=2\cot 2\times 20$$
$$=2\cot 40^\circ$$

ځواب) 223

يادونه : $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$$\sin 15^\circ+\sin 75^\circ=\sin 15^\circ+\cos 15^\circ$$
$$=\sqrt{2}\sin(45^\circ+15^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\sin 60°$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ځواب) 224

یادونه) $\cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a+b)\cos(a-b)$

$$2\sin^2 10° - \ 2\cos^2 20° = 2\left(\cos^2 10° - \cos^2 20°\right)$$
$$= 2\left(\cos^2 10° - \sin^2 70°\right)$$
$$= 2\left[\cos(10° + 70°) \cdot \cos(10° - 70°)\right]$$
$$= 2\cos 80° \cdot \cos 60°$$
$$= 2 \times \frac{1}{2}\cos 80°$$
$$= \cos 80°$$
$$= \sin 10°$$

ځواب) 225

یادونه) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}}$$
$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$
$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

ځواب) 226

یادونه) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(45° + \alpha)$

$$\frac{1+\tan 23°}{1-\tan 23} = \tan(45° + 23°)$$
$$= \tan 68°$$
$$= \cot 22°$$

227 ځواب)

(يادونه $\tan 2a = \dfrac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\cdot\tan(a-b)}$

$$\tan 2a = \frac{5+2}{1-(5)(2)}$$

$$= \frac{7}{-9}$$

(يادونه $\tan 2b = \dfrac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{1+\tan(a+b)\tan(a-b)}$

$$\tan 2b = \frac{5-2}{1+(5)(2)}$$

$$= \frac{3}{11}$$

228 ځواب)

$$if \quad \alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$$

(يادونه $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

229 ځواب)

(يادونه $\tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \dfrac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\cdot\tan(a-b)}$

$$\tan 2a = \frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{7}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}} \Rightarrow \tan 2a = 1 \Rightarrow \tan 2a = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{8}$$

230 ځواب)

$$\frac{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}{\sin x-\cos x}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left[1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\cot\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

231 ځواب)

$$if\quad \tan\beta=\frac{b}{a}\Rightarrow \sin t+b\cos t=\frac{a}{\cos\beta}\sin(t+\beta)$$

$$if\quad \tan\beta=\frac{b}{a}\Rightarrow \cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow a\sin t+b\cos t$$

$$=\frac{a}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sin(t+\beta)\Rightarrow a\sin t+b\cos t=\sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\beta)$$

232 ځواب)

$$1+\sin\alpha=1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

233 ځواب)

$$1-\sin\alpha=1-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

234 ځواب)

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\tan\frac{\alpha}{2}$$

235 ځواب)

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\tan\frac{\alpha}{2}$$

236 ځواب)

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\cos2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]}{\frac{1}{2}\left[1+\cos2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]}$$

$$= \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}$$

$$= \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$$

237 ځواب)

$$\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{(2\sin\alpha \cdot \cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha - 1)}$$

$$= \frac{2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$$

$$= \sin\alpha$$

238 ځواب)

$$\frac{2\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos 3\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{4\cos^3\alpha}{\cos\alpha} - \frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= 4\cos^2\alpha - 3$$

$$= 4\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - 3$$

$$= 2(1+\cos 2\alpha) - 3$$

$$= 2\cos 2\alpha - 1$$

239 ځواب)

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha+(2\cos^2\alpha-1)}{\sin\alpha+(2\sin\alpha\cos\alpha)}$$

$$= \frac{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}$$

$$= \cot\alpha$$

240 ځواب)

$$\begin{aligned}3\sin\alpha-\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha-\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)\\ &= 4\sin^3\alpha\\ &= \left(2\sin\alpha\right)\cdot\left(2\sin^2\alpha\right)\\ &= 2\sin\alpha\cdot\left[2\frac{\left(1-\cos 2\alpha\right)}{2}\right]\\ &= 2\sin\alpha\left(1-\cos 2\alpha\right)\end{aligned}$$

241 ځواب)

$$\begin{aligned}\frac{4\tan\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2} &= 2\times\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ &= 2\left(\sin 2\alpha\right)\cdot\left(\cos 2\alpha\right)\\ &= \sin 4\alpha\end{aligned}$$

242 ځواب)

مساوات د مثبت علامې سره ثبوتوو، د منفي علامې ثبوتول هم د مثبت علامې په شان دي.

$$\cot\alpha+\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cot\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\cot\alpha+\frac{\cot\alpha\cdot\cot\frac{\pi}{3}-1}{\cot\frac{\pi}{3}+\cot a}+\frac{\cos\alpha\cdot\cot\frac{2\pi}{3}-1}{\cot\frac{2\pi}{3}+\cot\alpha}$$

$$=\cot\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cot\alpha-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\cot\alpha}+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}\cot\alpha-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}+\cot\alpha}$$

$$=\frac{\cot\alpha\left(\cot^2\alpha-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cot\alpha-1\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\cot\alpha\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cot\alpha-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\cot\alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\cot\alpha\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\cot\alpha\right)}$$

$$=\frac{\cot^3\alpha-\frac{1}{3}\cot\alpha-\frac{1}{3}\cot\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\cot^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}-\cot\alpha-\frac{1}{3}\cot\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\cot^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}-\cot\alpha}{\cot^2\alpha-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{\cot^2\alpha - \frac{1}{3}}$$

$$= 3\cdot\frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$$

$$= 3\cdot\cot 3\alpha$$

(یادونه) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

243 (ځواب

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \tan 60^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\cdot\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ\cos 10^\circ - \sin 60^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\cos(60^\circ + 10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{4\cos 70^\circ}{\cos 70^\circ}$$

$$= 4$$

244 (ځواب

(یادونه) $\begin{cases}\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b\\ \cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b\end{cases}$

$$\tan\left(30 + \frac{B}{2}\right)\cdot\tan\left(30 - \frac{B}{2}\right) = \frac{\sin\left(30 + \frac{B}{2}\right)\sin\left(30 + \frac{B}{2}\right)}{\cos\left(30 + \frac{B}{2}\right)\cos\left(30 + \frac{B}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin^2 30 - \sin^2 \frac{B}{2}}{\cos^2 30 - \sin^2 \frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1-\cos B}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1-\cos B}{2}}$$

$$= \frac{1-2+2\cos B}{3-2+2\cos B}$$

$$= \frac{2\cos B - 1}{2\cos B + 1}$$

245 ځواب)

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos 2\alpha$$ (يادونه)

$$\frac{1-\tan^2(45-\alpha)}{1+\tan^2(45-\alpha)} = \cos 2(45-\alpha)$$

$$= \cos(90-2\alpha)$$

$$= \sin 2\alpha$$

246 ځواب)

(يادونه $$\begin{cases} \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{cases}$$

$$\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} + \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$$

$$= \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin 2\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos 2\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

247 ځواب)

$$\begin{cases} \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \Rightarrow \sin^3 a = \frac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a) \\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \Rightarrow \cos^3 a = \frac{1}{4}(\cos 3a + 3\cos a) \end{cases}$$

$$\cos^3 a \cdot \frac{\sin 3a}{3} + \sin^3 a \cdot \frac{\cos 3a}{3} = \frac{1}{4}(\cos 3a + 3\cos a)\cdot\frac{\sin 3a}{3} + \frac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a)\cdot\frac{\cos 3a}{3}$$

$$= \frac{1}{12}(\cos 3a \cdot \sin 3a + 3\cos a \cdot \sin 3a + 3\sin a \cdot \cos 3a - \sin 3a \cdot \cos 3a) = \frac{3}{12}\sin(3a + a) = \frac{1}{4}\sin 4a$$

248 ځواب)

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8}$$

$$= 2\left(\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2\left[\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$= 2\left(\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2\left[1 - 2\left(\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\right)^2\right]$$

$$= 2\left[1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$$

$$= 2\left[1 - 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

249 ځواب)

$$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}$$

$$=2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$=2\left[\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{2\pi}{8}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{3}{2}$$

250 ځواب)

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x \Rightarrow \cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{4}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{8}=\frac{\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{8}}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

د پاسنیو مساواتو دواړه خواوې له یوه بل سره ضربوو:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{8}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

251 ځواب)

یادونه) $\tan x+\cot x=\dfrac{2}{\sin 2x}$

$$\frac{4\cos 2x}{\tan x+\cot x}=\frac{4\cos 2x}{\frac{2}{\sin 2x}}$$

$$=2\sin 2x\cdot\cos 2x$$

$$=\sin 4x$$

252 ځواب)

یادونه) $\sin 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\quad,\quad\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$$\frac{4\tan\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}=2\cdot\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan\alpha}$$

$$=2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$$

$$=\sin 4\alpha$$

253 ځواب)

یادونه) $\cos 2a=\dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=\cot\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

$$\frac{1-\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{1+\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}=\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}$$

$$=\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2a\right)$$

$$=\sin 2a$$

ځواب) 254

يادونه) $\frac{\sin a}{1+\cos a}=\tan\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{1+\cos a}{\sin a}=\cot\frac{a}{2}$

$$\cot\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{\sin a} \Rightarrow \cot\frac{a}{2}=\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{1}{\sin a}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{a}{2}=\cot a+\csc a$$

ځواب) 255

يادونه) $\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad (\mathrm{I})$$

$$=-\tan\frac{x}{2}$$

$$(\mathrm{I}): if \quad \pi<x<2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\pi \Rightarrow \tan\frac{x}{2}<0 \Rightarrow \left|\tan\frac{x}{2}\right|=-\tan\frac{x}{2}$$

د tan کمان، يعنې $\frac{x}{2}$ په دويمه ربع کې دی او tan په دويمه ربع کې منفي دی.

ځواب) 256

يادونه) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2} \quad , \quad \frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$$\frac{2(1+\sin x)}{1+\cos x}=\frac{2+2\sin x}{1+\cos x}$$

$$=\frac{2}{1+\cos x}+2\frac{\sin x}{1+\cos x}$$
$$=\frac{2}{2\cos^2\frac{x}{2}}+2\tan\frac{x}{2}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\tan\frac{x}{2}$$
$$=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+2\tan\frac{x}{2}$$
$$=\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2$$

257 ځواب)

يادونه) $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\sin 2x}=\frac{1+\tan^2 x}{2\tan x}$,

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\tan 2x}=\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$$

$$2\cot\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\tan 2x}\right)=2\cot x\left(\frac{1+\tan^2 x}{2\tan x}-\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right)$$
$$=2\cot x\left(\frac{1+\tan^2 x-1+\tan^2 x}{2\tan x}\right)$$
$$=2\cot x\cdot\left(\frac{2\tan^2 x}{2\tan x}\right)$$
$$=2\cot x\cdot\tan x$$
$$=2$$

258 ځواب)

يادونه) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$

$$\sin^4\frac{\pi}{8}-\cos^4\frac{\pi}{8}=\left(\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\underbrace{\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)}_{1}$$
$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=-\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

259 ځواب)

یادونه) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$$\sin^6\frac{\pi}{8}+\cos^6\frac{\pi}{8}=1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{4}$$
$$=1-\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$=1-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{8}$$

260 ځواب)

$$\tan^2 x+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}=\tan^2 x+\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}$$
$$=\tan^2 x+2-\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=\tan^2 x+2-(1+\tan^2 x)$$
$$=1$$

261 ځواب)

$$\frac{3\cot 75^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{3\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15}$$
$$=\frac{3}{2}\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\tan 2(15^\circ)$$
$$=\frac{3}{2}\tan 30^\circ$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

262 ځواب)

$\cot x - \tan x = 2\cot 2x$ (يادونه

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ + 2\cot 40^\circ - \cot 20^\circ &= -(\cot 20^\circ - \tan 20^\circ) + 2\cot 40^\circ \\ &= -2\cot 40^\circ + 2\cot 40^\circ \\ &= 0\end{aligned}$$

263 ځواب)

$\cot x - \tan x = 2\cot 2x$ (يادونه

$$\begin{aligned}\cot a - \tan a - 2\tan 2a - 4\tan 4a &= (\cot a - \tan a) - 2\tan 2a - 4\tan 4a \\ &= 2\cot 2a - 2\tan 2a - 4\tan 4a \\ &= 2(\cot 2a - \tan 2a) - 4\tan 4a \\ &= 2\times 2\cot 4a - 4\tan 4a \\ &= 4(\cot 4a - \tan 4a) \\ &= 4\times 2\cot 8a \\ &= 8\cot 8a\end{aligned}$$

264 ځواب)

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos^2 x - 2\cos x}{1+\cos^2 x + 2\cos x} &= \frac{(1-\cos x)^2}{(1+\cos x)^2} \\ &= \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^2 \\ &= \left(\tan^2\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= \tan^4\frac{x}{2}\end{aligned}$$

265 ځواب)

$$\begin{aligned}\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right) &= \sin x\left(1+\frac{\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}}\right) \\ &= \sin x\left(\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}}\right)\end{aligned}$$

$$= \sin x\left[\frac{\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \sin x\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \tan x$$

266 ځواب)

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1+\cos x}{\sin x} = \cot\frac{x}{2}$$ (يادونه

$$\frac{1}{\cos 32^\circ} + \frac{1}{\tan 58^\circ} = \frac{1}{\cos 32^\circ} + \cot 58^\circ$$

$$= \frac{1}{\cos 32^\circ} + \frac{\cos 58^\circ}{\sin 58^\circ}$$

$$= \frac{1}{\sin 58^\circ} + \frac{\cos 58^\circ}{\sin 58^\circ}$$

$$= \frac{1+\cos 58^\circ}{\sin 58^\circ}$$

$$= \cot\frac{58^\circ}{2}$$

$$= \cot 29^\circ$$

267 ځواب)

$$4\cos x\cdot(60^\circ - x)\cdot\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$ (يادونه

$$\cos 15^\circ\cdot\cos 25^\circ\cdot\cos 35^\circ\cdot\cos 85^\circ = \frac{1}{4}\cdot\cos 15^\circ\times\left[4\cos 25^\circ\cdot\cos(60^\circ - 25^\circ)\cdot\cos(60^\circ + 25^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\cos 15^\circ\times\cos(3\times 25^\circ)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 15^\circ\cdot\cos 75^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2(15^\circ)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{16}$$

268 ځواب)

(يادونه $4\cos x\cdot\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$

$$\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cdot = \frac{\cos 10^\circ \times 4\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{4\cos 80^\circ}$$
$$= \frac{\cos 10^\circ \times [4\cos 20^\circ \cdot \cos(60^\circ - 20^\circ \cdot)\cdot\cos(60^\circ + 20^\circ)]}{4\cos 80^\circ}$$
$$= \frac{\cos 10^\circ \times \cos 3(20^\circ)}{4\cos 80^\circ}$$
$$= \frac{\cos 10^\circ \times \frac{1}{2}}{4\cos 80^\circ}$$
$$= \frac{\cos 10^\circ}{8\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{1}{8}\cot 10^\circ$$

269 ځواب)

$\sin 135^\circ = \sin(\pi - 45^\circ) = \sin 45^\circ$ $4\sin x\cdot\sin(60^\circ - x)\cdot\sin(60^\circ + x) = \sin 3x$

$\sin 165^\circ = \sin(\pi - 15^\circ) = \sin 15^\circ$

$$\sin 75^\circ \cdot \sin 135^\circ \sin 165^\circ = \sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 75^\circ$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(4\sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 75^\circ)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot[4\sin 15^\circ \cdot \sin(60^\circ - 15^\circ)\cdot\sin(60^\circ + 15^\circ)]$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\sin 3(15^\circ)$$
$$= \frac{1}{4}\sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}$$

270 ځواب)

$$\frac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha} = \frac{(1-\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}$$
$$= \frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$= \frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}$$
$$= \tan\alpha$$

271 ځواب)

$$\frac{\cos\alpha+\cos 2\alpha+1}{\sin\alpha+\sin 2\alpha} = \frac{\cos\alpha+(\cos 2\alpha+1)}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}$$
$$= \frac{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin\alpha+(2\sin\alpha\cos\alpha)}$$
$$= \frac{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \cot\alpha$$

272 ځواب)

(يادونه $\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$

$$\sin 18 \cdot \cos 35 = \frac{(\sin 18 \cdot \cos 18)\cdot\cos 36}{\cos 18}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 36\cdot\cos 36}{\cos 18}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 72\right)}{\cos 18}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sin 72}{\cos 18}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cos 18}{\cos 18}$$

$$= \frac{1}{4}$$

273 ځواب)

$$\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} = \frac{\left(\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8}\right)\sin\frac{x}{8}}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cos x}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\sin x\cos x}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{1}{16}\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{8}}$$

274 ځواب)

$$\sin 10\cos 40\cos 50 = \sin 10\cos 40\sin 40$$

$$= \frac{1}{2}\sin 10\sin 80$$

$$= \frac{1}{2}\sin 10\cos 10$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 20$$

$$= \frac{1}{4}\sin 20$$

275 ځواب)

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}{3\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{3}{2}\sin\frac{2\pi}{12}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

276 ځواب)

يادونه) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 x - \sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$= \cos^2 x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 x - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x$$

277 ځواب)

يادونه) $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b)\sin(a-b)$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right) = -\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]$$

$$= \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin 2t$$

$$= \sin 2t$$

278 ځواب)

$$\tan\left(30+\frac{\theta}{2}\right)\cdot\tan\left(30-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\left(30+\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(30-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(30+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(30-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin^2 30-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2 30-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\theta}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}$$

279 ځواب)

$$\frac{3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha}{3-4\cos4\alpha+\cos8\alpha}=\frac{3+4\cos4\alpha(2\cos^2 4\alpha-1)}{3-4\cos4\alpha+(2\cos^2 4\alpha-1)}$$

$$=\frac{2(\cos^2 4\alpha+2\cos4\alpha+1)}{2(\cos^2 4\alpha-2\cos4\alpha+1)}$$

$$=\frac{(\cos4\alpha+1)^2}{(\cos4\alpha-1)^2}$$

$$=\left(\frac{\cos4\alpha+1}{\cos4\alpha-1}\right)$$

$$=\left(\frac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin^2 2\alpha}\right)^2$$

$$=\cot^4 2\alpha$$

280 ځواب)

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x}}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+\cos 2x)}{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 x}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|\cos x|}}$$

$$;\ if\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} => \cos x > 0 => |\cos x| = +(\cos x)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\cos \frac{x}{2}\right|}$$

$$;\ if\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} => 0 \le \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} => \left|\cos \frac{x}{2}\right| = +\left(\cos \frac{x}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos \frac{x}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \frac{x}{4}}$$

$$= \left|\cos \frac{x}{4}\right|$$

$$;\ if\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} => 0 \le \frac{x}{4} \le \frac{\pi}{8} => \cos \frac{x}{4} > 0 => \left|\cos \frac{x}{4}\right| = \cos \frac{x}{4}$$

$$= \cos \frac{x}{4}$$

281 ځواب)

(یادونه) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

282 ځواب)

(یادونه) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+2}}{2}$$

283 ځواب)

(یادونه) $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{8} - \cot\frac{\pi}{8} &= -\left(\cot\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{8}\right)\\ &= -2\cot 2\left(\frac{\pi}{8}\right)\\ &= -2\cot\frac{\pi}{4}\\ &= -2\end{aligned}$$

284 ځواب)

$$\begin{aligned}\frac{\csc 4\theta + \cot 4\theta}{\cot\theta - \tan\theta} &= \frac{\frac{1}{\sin 4\theta} + \frac{\cos 4\theta}{\sin 4\theta}}{2\cot 2\theta}\\ &= \frac{\frac{1+\cos 4\theta}{\sin 4\theta}}{2\cot 2\theta}\\ &= \frac{1+\cos 4\theta}{2\sin 4\theta\cdot\cot 2\theta}\\ &= \frac{2\cos^2 2\theta}{(2\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta)(2\cot 2\theta)}\\ &= \cot 2\theta\cdot\frac{1}{2\cot 2\theta}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}$$

285 ځواب)

$$\tan x+\cot 2x=\tan x+\frac{1}{2}(\cot x-\tan x)$$
$$=\frac{1}{2}(\cot x+\tan x)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{2}{\sin 2x}$$
$$=\frac{1}{\sin 2x}$$

286 ځواب)

$$\text{(يادونه}\left\{\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\\[2ex] \tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\tan x}=\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{2}{2\tan\frac{x}{2}}$$
$$=\cot\frac{x}{2}$$

287 ځواب)

$$\frac{\tan^2 25-\tan^2 20}{1-\tan^2 25\tan^2 20}=\frac{\tan 25-\tan 20}{1+\tan 25\tan 20}\cdot\frac{\tan 25+\tan 20}{1-\tan 25\tan 20}$$
$$=\tan(25-20)\cdot\tan(25+20)$$
$$=\tan 5\cdot\underbrace{\tan 45}_{1}$$
$$=\tan 5$$

288 ځواب)

$$
\begin{aligned}
&64\sin 10\sin 20\sin 30\sin 40\cdots\sin 90\\
&=64(\sin 10\sin 50\cdot\sin 70)(\sin 20\sin 40\sin 80)(\sin 30\sin 60\sin 90)\\
&=64[\sin 10\sin(60-10)\cdot\sin(60+10)][\sin 20\sin(60-20)\sin(6+20)](\sin 30\sin 60\sin 90)\\
&=64\left[\frac{1}{4}\sin 3(10)\right]\left[\frac{1}{4}\sin 3(20)\right](\sin 30\sin 60\sin 90)\\
&=\frac{64}{16}\sin 30\cdot\sin 60\cdot\left(\sin 30\sin 60\underbrace{\sin 90}_{1}\right)\\
&=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

289 ځواب)

$$
\begin{aligned}
\frac{2\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}&=\frac{2\sin\alpha(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\\
&=\frac{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}{\cos\alpha}\\
&=4\cos^2 a-3\\
&=4\cos^2 a-2-1\\
&=2(2\cos^2\alpha-1)-1\\
&=2\cos 2\alpha-1
\end{aligned}
$$

290 ځواب)

$$
\begin{aligned}
&\sin 3\alpha\cdot\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cdot\cos^3\alpha=\\
&=\sin 3\alpha\left(\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}\right)+\cos 3\alpha\left(\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}\right)\\
&=\frac{1}{4}(3\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha-\sin^2 3\alpha+3\cos 3\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2 3\alpha)\\
&=\frac{1}{4}[(3\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha+3\cos 3\alpha\cos\alpha)+(\cos^2 3\alpha-\sin^2 3\alpha)]\\
&=\frac{1}{4}[3\cos(3\alpha-\alpha)+\cos 2(3\alpha)]\\
&=\frac{(3\cos 2\alpha+\cos 6a)}{4}\\
&=\cos^3 2\alpha
\end{aligned}
$$

291 ځواب)

$$\frac{\sin a-\cos a\cdot\tan\frac{a}{2}}{\cos a+\sin a\cdot\tan\frac{a}{2}}=\frac{\sin a-\cos a\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}}{\cos a+\sin a\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}}$$

$$=\frac{\sin a\cdot\cos\frac{a}{2}-\cos a\cdot\sin\frac{a}{2}}{\cos a\cdot\cos\frac{a}{2}+\sin a\cdot\sin\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{\sin\left(a-\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(a-\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$$

$$=\tan\frac{a}{2}$$

292 ځواب)

$$\tan 5x-\tan 3x-\tan 2x=\tan(3x+2x)-(\tan 3x+\tan 2x)$$

$$=\frac{\tan 3x+\tan 2x}{1-\tan 3x\tan 2x}-(\tan 3x+\tan 2x)$$

$$=\tan 3x+\tan 2x\left(\frac{1}{1-\tan 3x\tan 2x}-1\right)$$

$$=(\tan 3x+\tan 2x)\frac{\tan 3x\tan 2x}{1-\tan 3x\tan 2x}$$

$$=\frac{\tan 3x+\tan 2x}{1-\tan 3x\tan 2x}(\tan 3x\cdot\tan 2x)$$

$$=\tan(3x+2x)\cdot\tan 3x\tan 2x$$

$$=\tan 5x\cdot\tan 3x\cdot\tan 2x$$

293 ځواب)

(يادونه) $\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}=2\cot x$

$$\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}-2\tan x-4\tan 2x=\left(\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right)-2\tan x-4\tan 2x$$
$$=2\cot x-2\tan x-4\tan 2x$$
$$=2(\cot x-\tan x)-4\tan 2x$$
$$=2(2\cot 2x)-4\tan 2x$$
$$=4\cot 2x-4\tan 2x$$
$$=4(\cot 2x-\tan 2x)$$
$$=4(2\cot 4x)$$
$$=8\cot 4x$$

294 ځواب)

(يادونه) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}=1-\frac{1}{2}\sin^2\left(2\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=$$
$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

295 ځواب)

(يادونه) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$

$$\frac{\sin 12^\circ}{1+\cos 12^\circ}=\tan\frac{12^\circ}{2}$$
$$=\tan 60^\circ$$

296 ځواب)

$$\sin 75^\circ=\cos 15^\circ$$
$$\sin^6 15^\circ+\sin^6 75^\circ=\sin^6 15^\circ+\cos^6 15^\circ$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2(15^\circ)$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 30^\circ$$
$$=1-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=1-\frac{3}{4}\frac{1}{4}$$
$$=1-\frac{3}{16}$$
$$=\frac{3}{16}$$

ځواب) 297

$$\text{(يادونه)}\begin{cases}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\tan x\\[2mm] \dfrac{\sin x}{1-\cos x}=\cot\dfrac{x}{2} \Rightarrow \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\cot x\end{cases}\Bigg\rangle\ \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}-\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$
$$=\cot x-\tan x=2\cot 2x$$

ځواب) 298

$$\sin x\cdot\cos^3 x-\cos x\sin^3 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin x\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow 4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=1$$
$$\Rightarrow 2\cdot\left(2\sin x\cdot\cos x\right)\cos 2x=1$$
$$\Rightarrow 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x=1$$
$$\Rightarrow \sin 4x=1$$

ځواب) 299

$$\tan x+\cot x=4 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x}=4$$
$$\Rightarrow \sin 2x=\frac{2}{4}$$
$$\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

ځواب) 300

$$\tan\left(45^\circ-x\right)+\tan\left(45^\circ+x\right)=a \Rightarrow \tan\left(45^\circ-x\right)+\cot x\left[\frac{\pi}{2}-\left(45^\circ+x\right)\right]=a$$
$$\Rightarrow \tan\left(45^\circ-x\right)+\cot\left(45^\circ-x\right)=a$$
$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2\left(45^\circ-x\right)}=a$$
$$\Rightarrow a\sin\left(90^\circ-2x\right)=2$$

$$\Rightarrow a\cos 2x = 2$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{2}{a}$$

301 ځواب)

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x} \Rightarrow \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

302 ځواب)

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1-\left(-\frac{3}{7}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1-\frac{9}{49}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{40}{49}$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm\frac{2\sqrt{10}}{7} \quad ; \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{10}}{20}} = \frac{20}{3\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{7}}{-\frac{2\sqrt{10}}{7}} = \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$\begin{cases}\sin\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)=-\sin\left[2\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]=\\ =-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x=-\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\right)=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\\ \cos\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)=\cos\left[2\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x=-\dfrac{3}{7}\\ \tan\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)}{\cos\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}{-\dfrac{3}{7}}=-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\\ \cot\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\tan\left(x-\dfrac{5\pi}{2}\right)}=-\dfrac{3}{2\sqrt{10}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(2x-3\pi)=-\sin(3\pi-2x)=-\sin 2x=-2\sin x\cdot\cos x=\\ =-2\left(-\dfrac{3}{7}\right)\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\right)=-\dfrac{12\sqrt{10}}{49}\\ \cos(2x-3\pi)=\cos(3\pi-2x)=-\cos 2x=-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\\ =-\left[\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2\right]=-\dfrac{31}{49}\\ \tan(2x-3\pi)=\dfrac{\sin(2x-3\pi)}{\cos(2x-3\pi)}=\dfrac{-\dfrac{12\sqrt{10}}{49}}{-\dfrac{31}{49}}=\dfrac{12\sqrt{10}}{31}\\ \cot(2x-3\pi)=\dfrac{1}{\tan(2x-3\pi)}=\dfrac{1}{\dfrac{12\sqrt{10}}{31}}=\dfrac{31}{12\sqrt{10}}=\dfrac{31\sqrt{10}}{120}\end{cases}$$

303 ځواب)

$$\cos 4x=2\cos^2 2x-1 \Rightarrow \cos 4x=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1$$

$$\Rightarrow \cos 4x=2\left[2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-1\right]^2-1$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

304 ځواب)

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sin^2 2x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} if \ \ \sin^2 2x = 0 \Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2}(0) = 1 \\ if \ \ \sin^2 2x = 1 \Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\times \begin{cases} \min(A) = \frac{1}{2} \\ \max(A) = 1 \end{cases}$$

305 ځواب)

$$B = \sin^6 x + \cos^6 x$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sin^2 2x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} if \ \ \sin^2 2x = 0 \Rightarrow B = 1 - \frac{3}{4}(0) = 1 \\ if \ \ \sin^2 2x = 1 \Rightarrow B = 1 - \frac{3}{4}(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$
$$\times \begin{cases} \min(B) = \frac{1}{4} \\ \max(B) = 1 \end{cases}$$

306 ځواب)

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ \Rightarrow \sin 36^\circ = \cos 3(18^\circ)$$
$$\Rightarrow 2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$$
$$\Rightarrow 2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3$$
$$\Rightarrow 2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3$$
$$= 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$$
$$= \sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{1+5}}{4}$$
$$= \sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$= \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos^2 18° = 1 - \sin^2 18° \Rightarrow \cos^2 18° = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \Rightarrow \cos 18° = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 18° = \frac{\sin 18°}{\cos 18°} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,\sqrt{80}}{80}$$

$$\cot 18° = \frac{\cos 18°}{\sin 18°} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$$

$$\sin 36° = 2\sin 18° \cos 18°$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\cos 36° = \cos^2 18° - \sin^2 18°$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\tan 36° = \frac{\sin 36°}{\cos 36°}$$

$$= \frac{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

307 ځواب)

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin^2\gamma \Rightarrow \frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\frac{1-\cos\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\cos 2\alpha=1-\cos 2\beta+1-\cos 2\gamma$$

$$\Rightarrow 1-\cos 2\alpha=2-\cos 2\beta-\cos 2\gamma$$

$$\Rightarrow 1+\cos 2\alpha=\cos 2\beta+\cos 2\gamma$$

308 ځواب)

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)^2$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)^2$$

$$=2\times\frac{1}{2}\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)^2$$

$$=\underbrace{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}_{1}-2\underbrace{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}_{\sin^2\beta}$$

$$=1-2\sin^2\beta$$

$$=\cos 2\beta$$

309 ځواب)

$$\tan x=\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}\cdot\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}\right)^2}{(1+y)+(1-y)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\dfrac{2\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}{y}}{1+\left(\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)^2}=y$$

310 ځواب)

$$\tan x\cdot\tan(x+y)=3 \Rightarrow \frac{\sin x\sin(x+y)}{\cos x\cos(x+y)}=3$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\cdot(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}{\cos x(\cos x\cos y-\sin x\sin y)}=3$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x\cdot\cos y+\sin x\cos x\sin y}{\cos^2 x\cos y-\cos x\sin x\sin y}=\frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x\cos y+\sin x\cos x\sin y=3\cos^2 x\cos y-3\cos x\sin x\sin y$$

$$\Rightarrow 4\sin x\cos x\sin y+\sin^2 x\cos y-3\cos^2 x\cos y=0$$

$$\Rightarrow 2\times(2\sin x\cdot\cos x)\sin y+\cos y(\sin^2 x-3\cos^2 x)=0$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\sin y+\cos y(1-\cos^2 x-3\cos^2 x)=0$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\sin y+\cos y(1-4\cos^2 x)=0$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\sin y+\cos y\left[1-4\cdot\frac{(1+\cos 2x)}{2}\right]=0$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\sin y-\cos y-2\cos 2x\cos y=0$$

$$\Rightarrow -2(\cos 2x\cos y-\sin 2x\sin y)-\cos y=0$$

$$\Rightarrow -2\cos(2x+y)-\cos y=0$$

$$\Rightarrow 2\cos(2x+y)+\cos y=0$$

311 ځواب)

$$\sin x=\lambda\sin(\alpha-x) \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin(\alpha-x)}=\frac{\lambda}{1}$$

د پاسني کسر صورت د نسبت تفصيل او مخرج ته يې د نسبت ترکيب کوو:

$$\Rightarrow \frac{\sin x-\sin(\alpha-x)}{\sin x+\sin(\alpha-x)}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x-\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x}{\sin x+\sin\alpha\cos x-\cos\alpha\sin x}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x(1+\cos\alpha)-\sin\alpha\cos x}{\sin x(1-\cos\alpha)+\sin\alpha\cos x}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos x}{\sin x\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos x}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$=> \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin x\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos x\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin x\sin\frac{\alpha}{2}+\cos x\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$=> \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$=> \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$=> \cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\cot\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)$$

312 ځواب)

$$\sin x-\cos x=\frac{1}{2} => (\sin x-\cos x)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=> \sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$$

$$=> 1-2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$$

$$=> 1-\sin 2x=\frac{1}{4}$$

$$=> \sin 2x=1-\frac{1}{4}$$

$$=> \sin 2x=\frac{3}{4}$$

313 ځواب)

یادونه) $\tan x+\cot x=\dfrac{2}{\sin 2x}$

$$x-y=\frac{\pi}{2} => y=x-\frac{\pi}{2}$$

$$\tan x-\tan y=2 => \tan x-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2$$

$$=> \tan x-\tan\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=2$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2$$

$$\Rightarrow \tan x + \cot x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1$$

314 ځواب)

(يادونه) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

$$\tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha + \cot\alpha$$

$$= \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{2}{\frac{7}{8}}$$

$$= \frac{16}{7}$$

315 ځواب)

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 4\cos 2x \Rightarrow \tan x + \cot x = 4\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 4\cos 2x$$

$$\Rightarrow 2 = 4\sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow 1 = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow \sin 4x = 1$$

316 ځواب)

(يادونه) $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

317 ځواب)

$$\text{(يادونه)}\ \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow 2=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$if\quad \pi<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2}<0 \Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$\frac{x}{2}$ په دويمه ربع کې دی او $\tan\frac{x}{2}$ په دويمه ربع کې منفي دی.

318 ځواب)

$$5(\sin x+\cos x)=2\sqrt{10} \Rightarrow (\sin x+\cos x)=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{40}{25}$$

$$\Rightarrow 1+\sin 2x=\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 3\tan^2 x-10\tan x+3=0$$

$$\Rightarrow \tan x=\frac{5\pm\sqrt{16}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\tan x=3\\ \tan x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

319 ځواب)

$$\text{(يادونه)}\ \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$f\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\cos x \Rightarrow f\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad , \qquad \tan\frac{x}{2}=2$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{1-(2)^2}{1+(2)^2}$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{-3}{5}$$

320 ځواب)

$$\begin{aligned}
\log(3-4\cos x+\cos 2x) &= \log(3-4\cos x+2\cos^2 x-1)\\
&= \log(2-4\cos x+2\cos^2 x)\\
&= \log 2(1-2\cos x+\cos^2 x)\\
&= \log 2+\log(1-2\cos x+\cos^2 x)\\
&= \log 2+\log(1-\cos x)^2\\
&= \log 2+\log\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2\\
&= \log 2+\log(2)^2\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)^4\\
&= \log 2+\log(2)^2+\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)^4\\
&= \log 2+2\log 2+4\log\sin\frac{x}{2}\\
&= 3\log 2+4(a)\\
&= 3\log 2+4a
\end{aligned}$$

321 ځواب)

$$\begin{aligned}
2\cos 3x &= 2(4\cos^3 x-3\cos x)\\
&= (2\cos x)^3-3(2\cos x)\\
&= \left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)\\
&= a^3+\frac{1}{a^3}
\end{aligned}$$

ځواب) 322

یادونه) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\tan^2 x \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}} \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{2}$$

ځواب) 323

$$\begin{aligned}\widehat{A}=120 &\Rightarrow B+C=60^\circ\\ &\Rightarrow 3B+3C=180^\circ\\ &\Rightarrow \tan(3B+3C)=\tan 180^\circ\\ &\Rightarrow \tan(3B+3C)=0\\ &\Rightarrow \frac{\tan 3B+\tan 3C}{1-\tan 3B\tan 3C}=0\\ &\Rightarrow \tan 3B+\tan 3C=0\end{aligned}$$

ځواب) 324

یادونه) $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$

$$\begin{aligned}A&=\sin 7x+\sin 3x\\ &=2\sin\frac{7x+3x}{2}\cdot\cos\frac{7x-3x}{2}\\ &=2\sin 5x\cdot\cos 2x\end{aligned}$$

ځواب) 325

$$\begin{aligned}A&=\sin 4\alpha+\sin 4\beta\\ &=2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\alpha-4\beta}{2}\\ &=2\sin\frac{4(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos\frac{4(\alpha-\beta)}{2}\\ &=2\sin 2(\alpha+\beta)\cdot\cos 2(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

ځواب) 326

$$\begin{aligned}A&=\sin(2x+y)+\sin(x+2y)\\ &=2\sin\frac{(2x+y)+(x+2y)}{2}\cdot\cos\frac{(2x+y)-(x+2y)}{2}\end{aligned}$$

$$= 2\sin\frac{3x+3y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$2\sin\frac{3}{2}(x+y)\cdot\cos\frac{1}{2}(x-y)$$

327 ځواب)

يادونه) $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$

$$A = \sin 5x - \sin x$$

$$= 2\sin\frac{5x-x}{2}\cdot\cos\frac{5x+x}{2}$$

$$= 2\sin 2x\cdot\cos 3x$$

328 ځواب)

$$A = \sin(3x+y) - \sin(x+3y)$$

$$= 2\sin\frac{(3x+y)-(x+3y)}{2}\cdot\cos\frac{(3x+y)+(x+3y)}{2}$$

$$= 2\sin\frac{2x-2y}{2}\cdot\cos\frac{4x+4y}{2}$$

$$= 2\sin(x-y)\cdot\cos(2x+2y)$$

329 ځواب)

$$A = \sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\frac{3\theta}{2}-\frac{\theta}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{3\theta}{2}+\frac{\theta}{2}}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta$$

330 ځواب)

يادونه) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$

$$A = \cos 10x + \cos 4x$$

$$= 2\cos\frac{10x+4x}{2}\cdot\cos\frac{10x-4x}{2}$$

$$= 2\cos 7x\cdot\cos 3x$$

331 ځواب)

$$A = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cdot\cos\frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$= 2\cos\frac{2x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}$$

$$= \cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$$= \sqrt{2}\cos x$$

332 ځواب)

$$A = \cos 5\alpha + \cos 5\beta$$

$$= 2\cos\frac{5\alpha+5\beta}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha-5\beta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{5}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{5}{2}(\alpha-\beta)$$

333 ځواب)

یادونه) $\cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$

$$A = \cos 12x - \cos 6x$$

$$= -2\sin\frac{12x+6x}{2}\cdot\sin\frac{12x-6x}{2}$$

$$= -2\sin 9x\cdot\sin 3x$$

334 ځواب)

$$A = \cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -2\sin\frac{\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)+\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)}{2}\cdot\sin\frac{\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)-\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)}{2}$$

$$= -2\sin\frac{4x+0}{2}\cdot\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}}{2}$$

$$= -2\sin 2x\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= (-2)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin 2x$$
$$= \sqrt{3}\sin 2x$$

335 ځواب)

$$A = \cos 6\alpha - \cos 6\beta$$
$$= -2\sin\frac{6\alpha + 6\beta}{2}\cdot\sin\frac{6\alpha - 6\beta}{2}$$
$$= -2\sin 3(\alpha + \beta)\cdot\sin 3(\alpha - \beta)$$

336 ځواب)

یادونه) $\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$

$$A = \tan 7x + \tan x$$
$$= \frac{\sin(7x + x)}{\cos 7x \cdot \cos x}$$
$$= \frac{\sin 8x}{\cos 7x \cdot \cos x}$$

337 ځواب)

یادونه) $\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$

$$A = \tan 6x - \tan 2x$$
$$= \frac{\sin(6x - 2x)}{\cos 6x \cdot \cos 2x}$$
$$= \frac{\sin 4x}{\cos 6x \cdot \cos 2x}$$

338 ځواب)

$$A = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

339 ځواب)

یادونه) $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(q+p)}{\sin p\cdot\sin q}$

$$\begin{aligned} A &= \cot 3x+\cot x \\ &= \frac{\sin(x+3x)}{\sin 3x\cdot\sin x} \\ &= \frac{\sin 4x}{\sin 3x\cdot\sin x} \end{aligned}$$

340 ځواب)

یادونه) $\cot p-\cot q=\dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\cdot\sin q}$

$$\begin{aligned} A &= \cot 7x-\cot 8x \\ &= \frac{\sin(8x-7x)}{\sin 7x\cdot\sin 8x} \\ &= \frac{\sin x}{\sin 7x\cdot\sin 8x} \end{aligned}$$

341 ځواب)

$$B=\frac{\sin x-\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}$$

$$= \frac{(\sin x + \sin 7x) + (\sin 5x + \sin 3x)}{(\cos x + \cos 7x) + (\cos 5x + \cos 3x)}$$
$$= \frac{2\sin 4x \cdot \cos 3x + 2\sin 4x \cdot \cos x}{2\cos 4x \cdot \cos 3x + 2\cos 4x \cdot \cos x}$$
$$= \frac{2\sin 4x(\cos 3x + \cos x)}{2\cos 4x(\cos 3x + \cos x)}$$
$$= \frac{2\sin 4x}{2\cos 4x}$$
$$= \tan 4x$$

342 ځواب)

$$A = \sin x + \cos x$$
$$= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= 2\sin \frac{x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} \cdot \cos\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}$$
$$= 2\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

343 ځواب)

يادونه) $\cos^2 a - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$

$$B = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 1$$
$$= (1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \beta - 1$$
$$= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta)$$
$$= -[\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)]$$
$$= -\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

344 ځواب)

يادونه) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$

$$D = 1 + \cos a + \cos\beta + \cos(\alpha + \beta)$$

$$= (\cos\alpha + \cos\beta) + [1 + \cos(\alpha + \beta)]$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[2\cos\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right]$$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$

345 ځواب)

$$A = \cot^2 x - 3$$
$$= (\cot x - \sqrt{3})(\cos x + \sqrt{3})$$
$$= (\cot x - \cot 30)(\cot x + \cot 30)$$
$$= \frac{\sin(30 - x)}{\sin x\cdot\sin 30^\circ}\cdot\frac{\sin(30 + x)}{\sin x\cdot\sin 30}$$
$$= \frac{4\sin(30 - x)\sin(30 + x)}{\sin^2 x}$$

346 ځواب)

$$A = 2 - \sin^2\alpha - \sin^2 2\alpha - \sin^2 3\alpha - \sin^2 4\alpha$$
$$= 2 - \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 6\alpha}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 8\alpha}{2}\right)$$
$$= \frac{4 - 1 + \cos 2\alpha - 1 + \cos 4\alpha - 1 + \cos 6\alpha - 1 + \cos 8\alpha}{2}$$
$$= \frac{(\cos 8\alpha + \cos 2\alpha) + (\cos 6\alpha + \cos 4\alpha)}{2}$$
$$= \frac{2\cos 5\alpha\cdot\cos 3\alpha + 2\cos 5\alpha\cdot\cos\alpha}{2}$$
$$= \frac{2\cos 5\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha)}{2}$$
$$= \cos 5\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha)$$
$$= \cos 5\alpha(2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha)$$
$$= 2\cos 5\alpha\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$$

347 ځواب)

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\begin{aligned}
A &= \sin 13x + 3\sin 11x + 3\sin 9x + \sin 7x \\
&= (\sin 13x + \sin 7x) + 3(\sin 11x + \sin 9x) \\
&= 2\sin 10x \cdot \cos 3x + 6\sin 10x \cdot \cos x \\
&= 2\sin 10x(\cos 3x + 3\cos x) \\
&= 2\sin 10x(4\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos x) \\
&= 2\sin 10x(4\cos^3 x) \\
&= 8\sin 10x \cdot \cos^3 x
\end{aligned}$$

348 ځواب)

$$\begin{aligned}
A &= \sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 9\alpha - \sin 5\alpha \\
&= (\sin\alpha + \sin 3\alpha) + (\sin 9\alpha - \sin 5\alpha) \\
&= 2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + 2\sin 2\alpha \cdot \cos 7\alpha \\
&= 2\sin 2\alpha(\cos\alpha + \cos 7\alpha) \\
&= 2\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha \cdot \cos 3\alpha) \\
&= 4\sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 3\alpha
\end{aligned}$$

349 ځواب)

$$\begin{aligned}
A &= \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha - \frac{3}{2} \\
&= \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1+\cos 6\alpha}{2}\right) - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1+\cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha + 1 + \cos 6\alpha - 3}{2} \\
&= \frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{2} \\
&= \frac{(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) + \cos 4\alpha}{2} \\
&= \frac{(2\cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha) + \cos 4\alpha}{2} \\
&= \frac{\cos 4\alpha(2\cos 2\alpha + 1)}{2} \\
&= \frac{2\cos 4\alpha\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right)}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\cos 4\alpha\left(\cos 2\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{2\cos 4\alpha\left(2\cos\frac{2\alpha + \frac{\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha - \frac{\pi}{3}}{2}\right)}{2}$$

$$= 2\cos 4\alpha \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$$

350 ځواب)

$$\begin{aligned} A &= \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x \\ &= (\cos x + \cos 3x) + 2\cos 2x \\ &= (2\cos 2x \cdot \cos x) + 2\cos 2x \\ &= 2\cos 2x(\cos x + 1) \\ &= 2\cos 2x(\cos x + \cos 0) \\ &= 2\cos 2x\left(2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right) \\ &= 4\cos^2\frac{x}{2}\cdot\cos 2x \end{aligned}$$

351 ځواب)

(یادونه) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} A &= \sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha \\ &= (\sin\alpha + \sin 3\alpha) + 2\sin 2\alpha \\ &= (2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha) + 2\sin 2\alpha \\ &= 2\sin 2\alpha(\cos\alpha + 1) \\ &= 2\sin 2\alpha\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 4\sin 2\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

352 ځواب)

$$\begin{aligned} A &= \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha \\ &= \frac{1 + \cos 2(\alpha + \beta)}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)-1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$= \frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2\alpha}{2}$$
$$= \frac{2\cos\frac{2(\alpha+\beta)+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2(\alpha+\beta)-2\alpha}{2}}{2}$$
$$= \cos(2\alpha+\beta)\cdot\cos\beta$$

353 ځواب)

$$A = 1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$$
$$= (1+\cos 2\alpha)+\cos\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha+\cos\alpha$$
$$= 2\cos\alpha\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 60)$$
$$= 2\cos\alpha\left(2\cos\frac{\alpha+60}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-60}{2}\right)$$
$$= 4\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30\right)$$

354 ځواب)

$$A = \frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cot\alpha-\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\cdot\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}}{\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{2\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3}}{\frac{\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\alpha}{\frac{-1}{\sin\alpha}} = -\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

355 ځواب)

(يادونه $\cos 120 = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
A &= \sin^2 70 - \cos^2 50 \\
&= \left(\frac{1-\cos 140}{2}\right) - \left(\frac{1+\cos 100}{2}\right) \\
&= \frac{1-\cos 140 - 1 - \cos 100}{2} \\
&= \frac{-(\cos 140 + \cos 100)}{2} \\
&= \frac{-2\cos 120 \cos 20}{2} \\
&= -\cos 120 \cdot \cos 20 \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 20 \\
&= \frac{1}{2}\cos 20
\end{aligned}
$$

356 ځواب)

$$
\begin{aligned}
A &= \tan^2 3x - \tan^2 2y \\
&= (\tan 3x - \tan 2y)(\tan 3x + \tan 2y) \\
&= \frac{\sin(3x-2y)}{\cos 3x \cdot \cos 2y} \cdot \frac{\sin(3x+2y)}{\cos 3x \cdot \cos 2y} \\
&= \frac{\sin(3x-2y)\sin(3x+2y)}{\cos^2 3x \cdot \cos^2 2y}
\end{aligned}
$$

357 ځواب)

$$
\begin{aligned}
A &= \sin 2\alpha \cdot \tan\alpha + \cos 2\alpha \\
&= \sin 2\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos 2\alpha \\
&= \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos 2\alpha \\
&= \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} \\
&= \frac{\cos(2\alpha - \alpha)}{\cos\alpha} \\
&= \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

358 ځواب)

$$A = 2\sin^2 \alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1$$
$$= 2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1$$
$$= \sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \tan 60 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha$$
$$= \frac{\sin 60}{\cos 60}\cdot \sin 2\alpha - \cos 2\alpha$$
$$= \frac{\sin 60 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \cos 60}{\cos 60}$$
$$= \frac{-(\cos 2\alpha \cos 60 - \sin 60 \sin 2\alpha)}{\cos 60}$$
$$= \frac{-\cos(2\alpha + 60)}{\frac{1}{2}}$$
$$= -2\cos(2\alpha + 60)$$

359 ځواب)

$$A = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$= (\cos\alpha + \cos\beta) + [\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma)]$$
$$= \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \left(2\cos\frac{\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[2\cos\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}}{2}\right]$$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\left(-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right]$$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

360 ځواب)

$$A = \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \cos^2 4\alpha - 2$$

$$=\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1+\cos 6\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1+\cos 8\alpha}{2}\right)-2$$
$$=\frac{1+\cos 2\alpha+1+\cos 4\alpha+1+\cos 6\alpha+1+\cos 8\alpha-4}{2}$$
$$=\frac{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cos 8\alpha}{2}$$
$$=\frac{(\cos 8\alpha+\cos 2\alpha)+(\cos 6\alpha+\cos 4\alpha)}{2}$$
$$=\frac{2\cos\frac{8\alpha+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{8\alpha-2\alpha}{2}+2\cos\frac{6\alpha+4\alpha}{2}\cdot\cos\frac{6\alpha-4\alpha}{2}}{2}$$
$$=\frac{2\cos 5\alpha\cdot\cos 3\alpha+2\cos 5\alpha\cdot\cos\alpha}{2}$$
$$=\cos 5\alpha\cdot\cos 3\alpha+\cos 5\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$=\cos 5\alpha(\cos 3\alpha+\cos\alpha)$$
$$=\cos 5\alpha(2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha)$$
$$=2\cos 5\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha$$

361 ځواب)

$$A=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$$
$$=(\sin x+\sin y)+\sin(x+y)$$
$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$
$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}$$

362 ځواب)

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=(\cos\alpha+\cos\beta)+[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\gamma]$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

363 ځواب)

$$A = \frac{\cos\alpha + 2\cos2\alpha + \cos3\alpha}{\sin\alpha + 2\sin2\alpha + \sin3\alpha}$$
$$= \frac{(\cos\alpha + \cos3\alpha) + 2\cos2\alpha}{(\sin\alpha + \sin3\alpha) + 2\sin2\alpha}$$
$$= \frac{(2\cos2\alpha\cdot\cos\alpha) + 2\cos2\alpha}{2\sin2\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin2\alpha}$$
$$= \frac{2\cos2\alpha(\cos\alpha+1)}{2\sin2\alpha(\cos\alpha+1)}$$
$$= \cot2\alpha$$

364 ځواب)

$$A = \frac{\cos3\alpha - \cos5\alpha}{\cos3\alpha + \cos5\alpha} - \frac{\cos2\alpha - \cos4\alpha}{\cos2\alpha + \cos4\alpha}$$
$$= \frac{-2\sin4\alpha\cdot\sin(-\alpha)}{2\cos4\alpha\cdot\cos\alpha} - \frac{-2\sin3\alpha\cdot\sin(-\alpha)}{2\cos3\alpha\cdot\cos\alpha}$$
$$= \tan4\alpha\cdot\tan\alpha - \tan3\alpha\cdot\tan\alpha$$
$$= \tan\alpha(\tan4\alpha - \tan3\alpha)$$
$$= \tan\alpha\,\frac{\sin(4\alpha-3\alpha)}{\cos4\alpha\cdot\cos3\alpha}$$
$$= \tan\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos4\alpha\cdot\cos3\alpha}$$

365 ځواب)

$$A = \frac{\sin\alpha + \sin3\alpha}{\sin4\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin2\alpha}$$
$$= \frac{2\sin2\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin2\alpha}$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\cos2\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin2\alpha}$$
$$= \frac{\cos\alpha\cdot\sin2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos2\alpha}{\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha}$$
$$= \frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\frac{1}{2}\sin4\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$$

366 ځواب)

$$A=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$$
$$=[\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma]+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$
$$=\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$
$$=[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha]+(\cos\beta+\cos\gamma)$$
$$=2\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left[\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$$
$$=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\left[2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right]$$
$$=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

367 ځواب)

$$A=\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)$$
$$=(\sin a+\sin b)+[\sin c-\sin(a+b+c)]$$
$$=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}+2\sin\frac{-a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b+2c}{2}$$
$$=2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b+2c}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{a+b}{2}\left[-2\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{-b-c}{2}\right]$$
$$=4\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

368 ځواب)

$$A=1+2\sin\alpha-\cos 2\alpha$$
$$=1+2\sin\alpha-(1-2\sin^2\alpha)$$
$$=2\sin\alpha+2\sin^2\alpha$$
$$=2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$$
$$=2\sin\alpha\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\right)$$

$$= 2\sin\alpha\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$$

$$= 4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

369 ځواب)

(يادونه $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$

$$A=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left[2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right]\left[2\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}\cdot\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}\right]}{4\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos^2\frac{(\alpha-\beta)}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}$$

$$=\tan\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\tan\frac{(\alpha-\beta)}{2}$$

370 ځواب)

$$A=\frac{2\sin 2x-1}{2\sin 2x+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\right)}{2\left(\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos 2x-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin 2x+\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= -\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

ځواب) 371

د کسر صورت او مخرج له $\cot^2\theta$ سره ضربوو:

$$A = \frac{\cot^2\theta + 9\tan^2\theta - 6}{\cot^2\theta + \tan^2\theta + 2}$$

$$= \frac{\cot^2\theta - 6 + 9\tan^2\theta}{\cot^2\theta + 2 + \tan^2\theta}\cdot\frac{\cot^2\theta}{\cot^2\theta}$$

$$= \frac{\cot^4\theta + 9 - 6\cot^2\theta}{\cot^4\theta + 1 + 2\cot^2\theta}$$

$$= \frac{\left(\cot^2\theta - 3\right)^2}{\left(\cot^2\theta + 1\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(\cot\theta - \sqrt{3}\right)\left(\cot\theta + \sqrt{3}\right)\right]^2}{\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\left(\cot\theta - \cot 30\right)\left(\cot\theta + \cot 30\right)\right]^2}{\frac{1}{\sin^4\theta}}$$

$$= \frac{\left[\frac{\sin(30-\theta)}{\sin 30\cdot\sin\theta}\times\frac{\sin(30+\theta)}{\sin\theta\cdot\sin 30}\right]^2}{\frac{1}{\sin^4\theta}}$$

$$= \frac{\frac{16\sin^2(30-\theta)\cdot\sin^2(30+\theta)}{\sin^4\theta}}{\frac{1}{\sin^4\theta}}$$

$$= 16\sin^2(30-\theta)\sin^2(30+\theta)$$

372 ځواب)

$$A=\frac{1-\sin y+\cos y}{1+\sin y+\cos y}$$

$$=\frac{(1+\cos y)-\sin y}{(1+\cos y)+\sin y}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{y}{2}-2\sin\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}}{2\cos^2\frac{y}{2}+2\sin\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{y}{2}\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)}{2\cos\frac{y}{2}\left(\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}}$$

د پاسني کسر صورت او مخرج پر $\cos\frac{y}{2}$ تقسیم او وروسته یې بېلوو، نو لرو چې:

$$=\frac{\frac{\cos\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}-\frac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}}{\frac{\cos\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}+\frac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}}$$

$$=\frac{1-\tan\frac{y}{2}}{1+\tan\frac{y}{2}}$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{y}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{y}{2}}$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)$$

373 ځواب)

(یادونه $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$A=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3-\sin^3 x-\sin^3 2x-\sin^3 3x$$
$$=\left[\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x+3(\sin x+\sin 2x)(\sin 2x+\sin 3x)(\sin 3x+\sin x)\right]$$
$$-\sin^3 x-\sin^3 2x-\sin^3 3x$$
$$=3(\sin x+\sin 2x)(\sin 2x+\sin 3x)(\sin 3x+\sin x)$$
$$=3\left(2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)\left(2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)(2\sin 2x\cdot\cos x)$$
$$=24\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

374 ځواب)

$$=\frac{\sin(a-b)}{\sin a\cdot\sin b}+\frac{\sin(b-c)}{\sin b\cdot\sin c}+\frac{\sin(c-a)}{\sin c\cdot\sin a}=$$
$$=(\cot b-\cot a)+(\cot c-\cot b)+(\cot a-\cot c)=0$$

375 ځواب)

$$\sin 10+\sin 50-\sin 70=(\sin 10+\sin 50)-\sin 70$$
$$=[2\sin 30\cdot\cos(-20)]-\sin 70$$
$$=2\sin 30\cdot\cos 20-\sin 70$$
$$=2\times\frac{1}{2}\cdot\cos 20-\sin 70$$
$$=\cos 20-\cos 20$$
$$=0$$

376 ځواب)

$$\cos 20+\cos 100+\cos 140=\cos 20+(\cos 100+\cos 140)$$
$$=\cos 20+2\cos 120\cdot\cos 20$$
$$=\cos 20+2\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 20$$
$$=\cos 20-\cos 20$$
$$=0$$

377 ځواب)

$$\cos 47-\cos 61-\cos 11+\cos 25=(\cos 47+\cos 25)-(\cos 61+\cos 11)$$
$$=2\cos 36\cdot\cos 11-2\cos 36\cdot\cos 25$$

$$= 2\cos 36(\cos 11 - \cos 25)$$
$$= 2\cos 36(-2\sin 18 \cdot \sin(-7))$$
$$= 4\cos 36 \cdot \sin 18 \cdot \sin 7$$
$$= \frac{4\cos 36 \cdot \sin 18 \cdot \sin 7 \times \cos 18}{\cos 18}$$
$$= \frac{4\cos 36 \times \frac{1}{2}\sin 36 \cdot \sin 7}{\cos 18}$$
$$= \frac{\sin 72 \cdot \sin 7}{\cos 18}$$
$$= \frac{\cos 18 \cdot \sin 7}{\cos 18}$$
$$= \sin 7$$

378 ځواب)

$$\sin 87 - \sin 59 - \sin 93 + \sin 61 = (\sin 87 - \sin 93) + (\sin 61 - \sin 59)$$
$$= 2\sin(-3) \cdot \cos 90 + 2\sin 1 \cdot \cos 60$$
$$= 0 + 2(\sin 1) \times \frac{1}{2}$$
$$= \sin 1$$

379 ځواب)

$$\tan 30 + \tan 40 + \tan 50 + \tan 60 = (\tan 30 + \tan 60) + (\tan 40 + \tan 50)$$
$$= \frac{\sin 90}{\cos 30 \cdot \cos 60} + \frac{\sin 90}{\cos 40 \cdot \cos 50}$$
$$= \frac{1}{\cos 30 \cdot \cos 60} + \frac{1}{\cos 40 \cdot \cos 50} \quad ,$$
$$\begin{cases} \cos 40 = \sin 50 \\ \cos 30 = \sin 60 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{\sin 60 \cdot \cos 60} + \frac{1}{\sin 50 \cdot \cos 50}$$
$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 100}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sin 100}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\cos 10} \\
&= \frac{4\cos 10 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos 10} \\
&= \frac{4\left(\cos 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos 10} \\
&= \frac{4(\cos 10 + \cos 30)}{\sqrt{3}\cos 10} \\
&= \frac{4(2\cos 20 \cdot \cos 10)}{\sqrt{3}\cos 10} \\
&= \frac{8\cos 20}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

380 ځواب)

$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha - \sin^2\beta &= \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 2\beta}{2}\right) \\
&= \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2} \\
&= \frac{-2\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}{2} \\
&= -\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) \\
&= \sin(\alpha+\beta)\sin[-(\beta-\alpha)] \\
&= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

381 ځواب)

$$
\begin{aligned}
\cos^2\alpha - \sin^2\beta &= \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 2\beta}{2}\right) \\
&= \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} \\
&= \frac{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2} \\
&= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

382 ځواب)

$$
\sin x - \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x
$$

$$= -2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+x}{2}\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-x}{2}$$

$$= -2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-2x}{2}$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= -\sqrt{2}\sin\left[-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

383 **ځواب)**

يادونه) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2(\alpha-\beta)=[\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)]+\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=\sin(\alpha-\beta)[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$=\sin(\alpha-\beta)(2\sin\alpha\cdot\cos\beta)$$
$$=2\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\alpha-\beta)$$

384 **ځواب)**

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sin\left[\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]}{\frac{1}{2}}$$

$$=2\sin 2x$$

385 **ځواب)**

$$\sin 75-\sqrt{3}\cos 75-1 \quad =\sin 75-\tan 60\cdot\cos 75-1$$

$$=\sin 75-\frac{\sin 60}{\cos 60}\cdot\cos 75-1$$

$$= \frac{\sin 75 \cdot \cos 60 - \sin 60 \cos 75 - \cos 60}{\cos 60}$$

$$= \frac{\sin(75-60) - \cos 60}{\cos 60}$$

$$= \frac{\sin 15 - \sin 30}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{15-30}{2} \cdot \cos\frac{15+30}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-4\sin(7.5)\cos(22.5)}{1}$$

$$= -4\sin(7.5)\cos(22.5)$$

386 ځواب)

$$\cos 80 + \cos 40 - \cos 20 = (\cos 80 + \cos 40) - \cos 20$$
$$= 2\cos 60 \cos 20 - \cos 20$$
$$= \cos 20(2\cos 60 - 1)$$
$$= \cos 20\left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)$$
$$= 0$$

387 ځواب)

$$\tan(11°, 15') + \tan(33°, 45') = \frac{\sin(11°, 15' + 33°, 45')}{\cos(11°, 15')\cos(33°, 45')}$$
$$= \frac{\sin 45}{\cos(11°, 15')\cos(33°, 45')}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2\cos(11°, 15')\cos(33°, 45')}$$

388ځواب)

$$\cos 36 + \sin 36 = \cos 36 + \cos 54$$
$$= 2\cos 45 \cdot \cos(-9)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos 9$$
$$= \sqrt{2}\cos 9$$

389ځواب)

$$\tan 55+\tan 35+2=\left(\tan 55+\tan 35\right)+2$$
$$=\frac{\sin\left(55+35\right)}{\cos 55\cdot\cos 35}+2$$
$$=\frac{\sin 90}{\sin 35\cos 35}+2$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 70}+2$$
$$=\frac{2}{\sin 70}+2$$
$$=\frac{2+2\sin 70}{\sin 70}$$
$$=\frac{2\left(1+\sin 70\right)}{\sin 70}$$
$$=\frac{2\left(\sin 90+\sin 70\right)}{\sin 70}$$
$$=\frac{2\times 2\sin\frac{90+70}{2}\cdot\cos\frac{90-70}{2}}{\sin 70}$$
$$=\frac{4\sin 80\times\cos 10}{\sin 70}$$
$$=\frac{4\sin 80\times\sin 80}{\sin 70}$$
$$=\frac{4\sin^2 80}{\sin 70}$$

390ځواب)

$$\cos\frac{x}{2}-\cot x=\frac{\sin\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\sin x\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$$

391ځواب)

$$\frac{1}{\sin x}=\cot\frac{x}{2}-\cot x$$
$$\frac{1}{\sin 2x}=\cot x=\cot 2x$$

$$\frac{1}{\sin 4x}=\cot 2x-\cot 4x$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot 2^{n-1}x=\cot 2^n x$$

د پاسنیو مساواتو دواړه خواوې له یوه بل سره جمع کوو:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot\frac{x}{2}-\cot 2^n x$$

$$=\frac{\sin\left(2^n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin 2^n x\ \sin\frac{x}{2}}$$

ځواب392)

(یادونه $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$$1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha=1-\frac{1}{4}(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$$

$$=1-\frac{1}{4}\left(4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$$

$$=1-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$$

$$=1-\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\sin^2\beta$$

$$=1-\cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

ځواب393)

$$\tan 81-\tan 27-\tan 63+\tan 9=(\tan 81+\tan 9)-(\tan 63+\tan 27)$$

$$=\frac{\sin(81+9)}{\cos 81\cdot\cos 9}-\frac{\sin(63+27)}{\cos 63\cdot\cos 27}$$

$$=\frac{\sin 90}{\sin 9\cdot\cos 9}-\frac{\sin 90}{\sin 27\cdot\cos 27}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 18}-\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 54}$$

$$=\frac{\sin 54-\sin 18}{\frac{1}{2}\sin 54\cdot\sin 18}$$

$$= \frac{2\sin 18 \cdot \cos 36}{\frac{1}{2}\sin 54 \cdot \sin 18}$$

$$= \frac{4\cos 36}{\sin 54}$$

$$= \frac{4\cos 36}{\cos 36}$$

$$= 4$$

ځواب) 394

$$\frac{\sqrt{2} - \cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sqrt{2} - (\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

ځواب) 395

يادونه) $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma +$

$+ \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$
$$= \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - (\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma)$$
$$= \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$$

396ځواب)

$$\begin{aligned}1+\sqrt{3}\cos a+\cos 2a &= (1+\cos 2a)+\sqrt{3}\cos a\\ &= 2\cos^2 a+\sqrt{3}\cos a\\ &= 2\cos a\left(\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 2\cos a(\cos a+\cos 30^\circ)\\ &= 4\cos a\cdot\cos\frac{a+30^\circ}{2}\cdot\cos\frac{a-30^\circ}{2}\end{aligned}$$

397ځواب)

$$\begin{aligned}\sin 2x(1+\tan x\cdot\tan 2x) &= \sin 2x\left(1+\frac{\sin x\cdot\sin 2x}{\cos x\cdot\cos 2x}\right)\\ &= \sin 2x\left(\frac{\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x}{\cos x\cdot\cos 2x}\right)\\ &= \sin 2x\left[\frac{\cos(2x-x)}{\cos x\cdot\cos 2x}\right]\\ &= \sin 2x\cdot\frac{\cos x}{\cos x\cdot\cos 2x}\\ &= \tan 2x\end{aligned}$$

398ځواب)

$$\frac{\tan 3x+\tan x}{\tan 3x-\tan x}=\frac{\frac{\sin(3x+x)}{\cos 3x\cos x}}{\frac{\sin(3x-x)}{\cos 3x\cos x}}=\frac{\sin 4x}{\sin 2x}=\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=2\cos 2x$$

399ځواب)

$$\begin{aligned}\cos 10-\cos 130+\cos 110 &= (\cos 10+\cos 110)-\cos 130\\ &= 2\cos\frac{10+110}{2}\cdot\cos\frac{10-110}{2}-\cos 130\\ &= 2\cos 60\times\cos 50+\cos 50\\ &= 2\times\frac{1}{2}\cos 50+\cos 50\end{aligned}$$

$$= 2\cos 50$$
$$= 2\sin 40$$

(یادونه $\cos 130 = \cos(180-50) = -\cos 50$

400ځواب)

$$2\cos 32 - \tan\frac{\pi}{3} = 2\cos 32 - \sqrt{3}$$
$$= 2\left(\cos 32 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2(\cos 32 - \cos 30)$$
$$= 2(-2\sin 1 \sin 31)$$
$$= -4\sin 179 \sin 31$$

(یادونه $\sin 1 = \sin(\pi - 179) = \sin 179$

401ځواب)

$$\cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) - \cos 2x \cos 2y$$
$$= \frac{1+\cos(2x+2y)}{2} + \frac{1+\cos(2x-2y)}{2} - \cos 2x \cos 2y$$
$$= 1 + \frac{1}{2}[\cos(2x+2y) + \cos(2x-2y)] - \cos 2x \cos 2y$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left[2\cos\frac{(2x+2y)+(2x-2y)}{2} \cdot \cos\frac{(2x+2y)-(2x-2y)}{2}\right] - \cos 2x \cos 2y$$
$$= 1 + \cos 2x \cdot \cos 2y - \cos 2x \cos 2y$$
$$= 1$$

402ځواب)

$$\sin(\alpha + 3\pi) = -\sin\alpha$$
$$\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\pi + \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(\alpha + 3\pi) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\alpha + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \left[\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \sin a$$
$$= 2\sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\sin\alpha-\sin\alpha$$
$$= \sin a-\sin\alpha$$
$$= 0$$

403ځواب)

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 4x-\frac{3}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}-\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 8x)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\cos 2x+2\cos\frac{4x+8x}{2}\cdot\cos\frac{4x-8x}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}[\cos 2x+2\cos 6x\cdot\cos(-2x)]$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos 2x+2\cos 6x\cdot\cos 2x)$$
$$=-\frac{1}{2}\cos 2x(1+2\cos 6x)$$
$$=-\cos 2x\left(\frac{1}{2}+\cos 6x\right)$$
$$=-\cos 2x(\cos 60+\cos 6x)$$
$$=-2\cos 2x\cdot\cos(30+3x)\cdot\cos(30-3x)$$

404ځواب)

$$\frac{\sin a+\sin 3a}{\sin 4a}-\frac{\sin a}{\sin 2a}=\frac{\sin 2a(\sin a+\sin 3a)-\sin 4a\sin a}{\sin 4a\sin 2a}$$
$$=\frac{\sin 2a(2\sin 2a\cos a)-2\sin 2a\cos 2a\sin a}{\sin 4a\cdot\sin 2a}$$
$$=\frac{2\sin 2a(\sin 2a\cdot\cos a-\cos 2a\cdot\sin a)}{\sin 4a\cdot\sin 2a}$$
$$=\frac{2\sin(2a-a)}{\sin 4a}$$
$$=\frac{2\sin a}{\sin 4a}$$

405ځواب)

$$f(x)=\sin x+\cos x+\sin 3x+\cos 3x \quad => f(x)=(\sin 3x+\sin x)+(\cos 3x+\cos x)$$
$$=> f(x)=2(\sin 2x\cdot\cos x)+2(\cos 2x\cdot\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\cos x} = \frac{2(\sin 2x \cdot \cos x) + 2(\cos 2x \cdot \cos x)}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\cos x} = 2\sin 2x + 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

ځواب(406

$$\sin x - \sin y = \sin\frac{x-y}{2} \Rightarrow 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{2\pi}{3}$$

ځواب(407

$$\log_2 \frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \log_2 \frac{2\sin 30^\circ \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \log_2 \frac{2\sin 30^\circ \cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \log_2 \frac{1}{2\sin 10^\circ}$$

$$= \log_2 1 - \log_2(2\sin 10^\circ)$$

$$= 0 - (\log_2 2 + \log_2(\sin 10^\circ))$$

$$= -\log_2 2 - \log_2 \sin 10^\circ$$

$$= -1 - a$$

ځواب(408

$$\cos^2 a - \sin^2 b = \frac{1+\cos 2a}{2} - \frac{1-\cos 2b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 a - \sin^2 b = \frac{\cos 2a + \cos 2b}{2}$$

$$=> \cos^2 a-\sin^2 b=\frac{2\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)}{2}$$
$$=> \cos^2 a-\sin^2 b=\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)$$
$$=> \cos^2 a-\sin^2 b=\cos 60°\cdot\cos(a-b)$$
$$=> \cos^2 a-\sin^2 b=\frac{1}{2}\cos(a-b)$$
$$=> \frac{\cos^2 a-\sin^2 b}{\cos(a-b)}=\frac{1}{2}$$
$$=> \frac{1}{2}$$

409ځواب)

$$a, b, c, \cdots$$
$$b=a+d \qquad , \qquad c=a+2d$$
$$\cos a+\cos c=2\cos\frac{a+c}{2}\cdot\cos\frac{a-c}{2}$$
$$=2\cos\frac{a+(a+2d)}{2}\cdot\cos\frac{a-(a+2d)}{2}$$
$$=2\cos\frac{2a+2d}{2}\cdot\cos\frac{2d}{2}$$
$$=2\cos(a+d)\cdot\cos d$$
$$=2\cos b\cdot\cos d$$

410ځواب)

لومړی طریقه:

$$if \quad a>b>0 => 0<\frac{b}{a}<1$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ دصفر او یوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\sin\alpha$ یا $\cos\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{b}{a}=\cos\alpha$ وي:

$$A=a+b => A=a\left(1+\frac{b}{a}\right) => A=a(1+\cos\alpha) => A=a\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) => A=2a\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

دویمه طریقه:

فرضوو چې $\frac{b}{a}=\sin\alpha$ وي:

$$A = a + b \Rightarrow A = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow A = a(1 + \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow A = a\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow A = a\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2} \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = 2a\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = 2a\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow A = 2a\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

ځواب411)

$$if \quad a > b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{b}{a} < 1$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ دصفر او یوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\cos\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{b}{a} = \cos\alpha$ وي:

$$A = a - b \Rightarrow A = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow A = a(1 - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow A = a \times 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ځواب412)

$$if \quad a > b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{b}{a} < 1$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ دصفر او یوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\cos\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{b}{a} = \cos\alpha$ وي:

$$A=\frac{a-b}{a+b}+1 \quad => A=\frac{a\left(1-\frac{b}{a}\right)}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}+1$$

$$=> A=\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}+1$$

$$=> A=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+1$$

$$=> A=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+1$$

$$=> A=\tan^2\frac{\alpha}{2}+1$$

$$=> A=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=> A=\sec^2\frac{\alpha}{2}$$

413ځواب)

$$if \quad a>b>0 => 0<\frac{b}{a}<1$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ دصفر او یوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\cos\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{b}{a}=\cos\alpha$ وي:

$$A=2\sqrt{a^2-b^2}+a => A=2\sqrt{a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}+a$$

$$=> A=2|a|\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}+a \quad , \quad a>0$$

$$=> A=2a\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}+a$$

$$=> A=2a\left(\sqrt{1-\cos^2\alpha}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=> A = 2a\left(|\sin\alpha| + \frac{1}{2}\right)$$

$$=> A = 2a\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=> A = 2a\left[2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$=> A = 4a\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$$

ځواب414)

$$if \quad a > b > 0 => 0 < \frac{b}{a} < 1$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ دصفر او يوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\cos\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{b}{a} = \cos\alpha$ وي:

$$A = \sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} \ => A = \sqrt{a\left(1+\frac{b}{a}\right)} - \sqrt{a\left(1-\frac{b}{a}\right)}$$

$$=> A = \sqrt{2a}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=> A = \sqrt{2a}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$=> A = \sqrt{2a}\left[2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}}{2}\right]$$

$$=> A = 2\sqrt{2a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=> A = 2\sqrt{2a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=> A = 2\sqrt{a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ځواب415)

$$if \quad a > b > 0 => 0 < \frac{b}{a} < 1$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ دصفر او يوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\cos\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{b}{a}=\cos\alpha$ وي:

$$A=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+1 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{a\left(1-\frac{b}{a}\right)}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}}+1$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

416ځواب)

$$if \quad a>b>0 \Rightarrow 0<\frac{b}{a}<1$$

له دې چې $\frac{b}{a}$ دصفر او يوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\cos\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{b}{a}=\cos\alpha$ وي:

$$A=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-a}} \Rightarrow A=\sqrt{\frac{a\left(1-\frac{b}{a}\right)}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}}+\sqrt{\frac{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}{a\left(1-\frac{b}{a}\right)}}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}}+1$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+1$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}+1$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\tan^2\alpha} + 1$$
$$\Rightarrow A = |\tan\alpha| + 1$$
$$\Rightarrow A = \tan\alpha + 1$$
$$\Rightarrow A = \tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$
$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}} + \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$
$$\Rightarrow A = \tan\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow A = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$\Rightarrow A = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin\alpha}$$

417ځواب)

$$if \quad q > p > 0 \Rightarrow 0 < \frac{p}{q} < 1$$

له دې چې $\frac{p}{q}$ دصفر او يوه ترمنځ پروت دی، کولی شو هغه $\sin\alpha$ وټاکو، فرضوو چې $\frac{p}{q} = \sin\alpha$ وي:

$$A = p^2 - q^2\sin^2 x \Rightarrow A = q^2\left(\frac{p^2}{q^2} - \sin^2 x\right)$$
$$\Rightarrow A = q^2\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \sin^2 x\right]$$
$$\Rightarrow A = q^2\left(\sin^2\alpha - \sin^2 x\right)$$

$$=> A = q^2\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}-\frac{1-\cos2x}{2}\right)$$

$$=> A = q^2\left(\frac{1-\cos2\alpha-1+\cos2x}{2}\right)$$

$$=> A = \frac{q^2}{2}(\cos2x-\cos2\alpha)$$

$$=> A = \frac{q^2}{2}\left[-2\sin\frac{2x+2\alpha}{2}\cdot\sin\frac{2x-2\alpha}{2}\right]$$

$$=> A = -q^2\sin(x+\alpha)\cdot\sin(x-\alpha)$$

418ځواب)

$$A = \sqrt{4\tan\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{4\tan\alpha-\sin\alpha}$$

$$=> A = \sqrt{4\tan\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{4}\right)}+\sqrt{4\tan\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha}{4}\right)} \quad ; \; if \;\; \frac{\cos\alpha}{4}=\cos\varphi$$

$$=> A = \sqrt{4\tan\alpha(1+\cos\varphi)}+\sqrt{4\tan\alpha(1-\cos\varphi)}$$

$$=> A = \sqrt{4\tan\alpha\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}+\sqrt{4\tan\alpha\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$=> A = 2\sqrt{2\tan\alpha}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}+2\sqrt{2\tan\alpha}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$=> A = 2\sqrt{2\tan\alpha}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=> A = 2\sqrt{2\tan\alpha}\cdot\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=> A = 4\sqrt{\tan\alpha}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

یادونه) $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

419ځواب)

$$A = \frac{4\sin2x-3}{4\sin2x+3} => A = \frac{4\left(\sin2x-\frac{3}{4}\right)}{4\left(\sin2x+\frac{3}{4}\right)} \quad ; \quad if \;\; \sin2\alpha = \frac{3}{4}$$

پام مو وي چې کولی شو د $\frac{3}{4}$ پرځای $\sin\alpha$ په پام کې ونيسو، خو له دې چې $\sin 2x$ په مسئله کې نشته، نو د محاسبې د اسانۍ لپاره $\sin 2\alpha$ په پام کې نيسو:

$$=> A = \frac{4(\sin 2x - \sin 2\alpha)}{4(\sin 2x + \sin 2\alpha)}$$

$$=> A = \frac{\sin 2x - \sin 2\alpha}{\sin 2x + \sin\alpha}$$

$$=> A = \frac{2\sin(x-\alpha)\cos(x+\alpha)}{2\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha)}$$

$$=> A = \tan(x-\alpha)\cdot\cot(x+\alpha)$$

420ځواب)

$$A = \frac{2+3\cos 20}{2-3\cos 20} => A = \frac{3\left(\frac{2}{3}+\cos 20\right)}{3\left(\frac{2}{3}-\cos 20\right)} \quad ; \quad if \quad \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$=> A = \frac{\cos 2\alpha + \cos 20}{\cos 2\alpha - \cos 20}$$

$$=> A = \frac{2\cos\frac{2\alpha+20}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-20}{2}}{-2\sin\frac{2\alpha+20}{2}\cdot\sin\frac{2\alpha-20}{2}}$$

$$=> A = \frac{\cos(\alpha+10)\cdot\cos(\alpha-10)}{\sin(\alpha+10)\cdot\sin(10-\alpha)}$$

$$=> A = \frac{\cos(\alpha+10)\cdot\cos(10-\alpha)}{\sin(\alpha+10)\cdot\sin(10-\alpha)}$$

$$=> A = \cot(\alpha+10)\cot(10-\alpha)$$

421ځواب)

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-ab)^2 - (a^2)(1) = a^2b^2 - a^2$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} => x = \frac{-(-ab) \pm \sqrt{a^2b^2 - a^2}}{a^2}$$

$$=> x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - a^2}}{a^2}$$

$$=> x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)}}{a^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{ab\pm ab\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}}{a^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{ab\left(1\pm\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}\right)}{a^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{b\left(1\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)}{a}$$

$$b>1\Rightarrow 0<\frac{1}{b}<1$$

له دې چې $\frac{1}{b}$ د صفر او یوه ترمنځ پروت دی، نو کولی شو $\sin\alpha$ په پام کې ونیسو، نو فرضوو چې $\frac{1}{b}=\sin\alpha$ وي

$$if\quad \frac{1}{b}=\sin\alpha\Rightarrow\frac{1}{b^2}=\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow x=\frac{b}{a}\left(1\pm\sqrt{\cos^2\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow x=\frac{b}{a}(1\pm\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{b}{a}(1+\cos\alpha)=\frac{b}{a}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2b}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2}\\ x''=\frac{b}{a}(1-\cos\alpha)=\frac{b}{a}\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2b}{a}\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{cases}$$

422ځواب)

له دې چې په مسئله کې شرط نه وو راکړل شوی، نو پخپله خوښه له a یا b (مثلاً له a څخه) فکتور نیسو $\frac{b}{a}=\tan\alpha$:

پاملرنه:

$\frac{b}{a}$ نشو کولی $\sin\alpha$ یا $\cos\alpha$ فرض کړو، ځکه نه پوهیږو چې $\frac{b}{a}$ په 1 او -1 فاصله کې تحول کوي یا نه.

$$A = a + b \Rightarrow A = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow A = a(1 + \tan\alpha)$$

$$\Rightarrow A = a\left(\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha\right)$$

$$\Rightarrow A = a \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos\alpha}$$

ځواب)423

له دې چې په مسئله کې شرط نه وو راکړل شوی، نو پخپله خوښه له a څخه فکتور نیسو $\tan\alpha = \frac{b}{a}$:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow A = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow A = |a|\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow A = |a|\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow A = |a|\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{|a|}{\cos\alpha}$$

ځواب)424

له دې چې په مسئله کې شرط نه وو راکړل شوی، نو پخپله خوښه له a څخه فکتور نیسو $\tan\alpha = \frac{b}{a}$:

$$A=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} => A=\frac{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}{a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}$$

$$=> A=\frac{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=> A=\frac{\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}{\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}$$

$$=> A=\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$=> A=\frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$=> A=\sec 2\alpha$$

425ځواب)

له دې چې په مسئله کې شرط نه وو راکړل شوی، نو په خپله خوښه له a څخه فکتور نیسو
: $\frac{b}{a}=\tan\alpha$

$$A=\sqrt{a^2+b^2}+b => A=\sqrt{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}+b$$

$$=> A=\sqrt{a^2\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}+b$$

$$=> A=|a|\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+b$$

$$=> A=a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+b$$

$$=> a\left(\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow A = a\left(\sqrt{1+\tan^2\alpha} + \tan\alpha\right)$$

$$\Rightarrow A = a\left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} + \tan\alpha\right)$$

$$\Rightarrow A = a\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow A = a\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow A = a\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2} + \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow A = a\cdot\frac{2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2a\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$$

ځواب) 426

له دې چې په مسئله کې شرط نه وو راکړل شوی، نو پخپله خوښه له a يا b (مثلاً له b څخه) فکتور نيسو، فرضوو چې $\frac{b}{a} = \tan\alpha$:

$$if \quad \frac{b}{a} = \tan\alpha \Rightarrow \frac{a}{b} = \cot\alpha$$

$$A = \frac{a^2-b^2}{ab} \Rightarrow A = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow A = \cot\alpha - \tan\alpha$$

$$=> A=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\tan\alpha$$

$$=> A=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha}$$

$$=> A=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=> A=\frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$$

$$=> A=2\cot 2\alpha$$

427ځواب)

له دې چې په مسئله کې شرط نه وو راکړل شوی، نو په خپله خوښه له a څخه فکتور نیسو، فرضوو چې $\frac{b}{a}=\tan\alpha$:

$$if\ \ \frac{b}{a}=\tan\alpha => \frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$A=a\sin x\pm b\cos x => A=a\left(\sin x\pm\frac{b}{a}\cos x\right)$$

$$=> A=a\left(\sin x\pm\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x\right)$$

$$=> A=a\left(\frac{\sin x\cdot\cos\alpha\pm\sin\alpha\cdot\cos x}{\cos\alpha}\right)$$

$$=> A=a\,\frac{\sin(x\pm\alpha)}{\cos\alpha}$$

428ځواب)

له دې چې په مسئله کې شرط نه وو راکړل شوی، نو په خپله خوښه له a څخه فکتور نیسو، فرضوو چې $\frac{b}{a}=\tan\alpha$:

$$\tan 3x=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b} => \tan 3x=\frac{a\left(1-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)}{b}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}}{\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{1-\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}{\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{1-\sqrt{a+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{1-\frac{1}{\cos\alpha}}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{1-\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-1}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = \frac{-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan 3x = -\tan\frac{\alpha}{2}$$

429ځواب)

له دې چې په مسئله کې شرط نه دې راکړل شوي، نو فرضوو چې $\tan\alpha = \frac{b}{a}$:

$$A = a^2\tan x - b^2\cot x \Rightarrow A = a^2\cot x\left(\tan^2 x - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow A = a^2\cot x\left(\tan^2 x + \tan^2\alpha\right)$$

$$\Rightarrow A = a^2\cot x(\tan x - \tan\alpha)(\tan x + \tan\alpha)$$

$$=> A = a^2 \cot x \cdot \frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{\sin(x+\alpha)}{\cos x \cdot \cos\alpha}$$

$$=> A = \frac{a^2 \sin(x-\alpha)\cdot \sin(x+\alpha)}{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos^2 \alpha}$$

430ځواب)

$$A = \frac{2+\tan x}{2-\tan x} \;=> A = \frac{\tan\alpha + \tan x}{\tan\alpha - \tan x} \quad ; \quad if \;\; \tan\alpha = 2$$

$$=> \frac{\dfrac{\sin(\alpha + x)}{\cos\alpha \cdot \cos x}}{\dfrac{\sin(\alpha - x)}{\cos\alpha \cdot \cos x}}$$

$$=> A = \frac{\sin(\alpha + x)}{\sin(\alpha - x)}$$

431ځواب)

$$C = 5 - 3\tan x => C = 3\left(\frac{5}{3} - \tan x\right) \quad ; \quad if \;\; \tan\alpha = \frac{5}{3}$$

$$=> C = 3(\tan\alpha - \tan x)$$

$$=> C = \frac{3\sin(\alpha - x)}{\cos\alpha \cdot \cos x}$$

432ځواب)

$$A = a\sin 2x - (a-2)\cos 2x => A = a\left(\sin 2x - \frac{a-2}{a}\cos 2x\right)$$

$$; \quad if \;\; \frac{a-2}{a} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=> A = a\left(\sin 2x - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos 2x\right)$$

$$=> A = a \cdot \frac{\sin 2x \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2x}{\cos\alpha}$$

$$=> A = \frac{a\sin(2x - \alpha)}{\cos\alpha}$$

433ځواب)

$$x = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} => x = \frac{a^2\left(1 - \dfrac{1}{a^2}\right)}{a^2\left(1 + \dfrac{1}{a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1-\frac{1}{a^2}}{1+\frac{1}{a^2}} \quad ; \quad if\ \frac{1}{a^2}=\tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow x=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow x=\cos 2\alpha$$

ځواب434)

$$\sin x=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2} \Rightarrow \sin x=\frac{4\left[a\left(1-\frac{b}{a}\right)\sqrt{a^2\cdot\frac{b}{a}}\right]}{\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^2}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{4a\left(1-\frac{b}{a}\right)a\sqrt{\frac{b}{a}}}{a^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{4\left(1-\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{b}{a}}}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} \quad ; \quad if\ \frac{b}{a}=\tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{4\left(1-\tan^2\alpha\right)\sqrt{\tan^2\alpha}}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{4\left(1-\tan^2\alpha\right)\tan\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin x=2\times\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin x=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin x=\sin 4\alpha$$

ځواب435)

له دې چې د دوو $2x+\frac{\pi}{3}$ او $\frac{\pi}{6}-2x$ زاويو مجموع مساوي په $\frac{\pi}{2}$ ده، نو د هرې زاويې د ساين پرځای کولی شو د هماغه زاويې کوساين په پام کې ونيسو، په پايله کې:

$$A = b\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$$

$$\Rightarrow A = b\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow A = b\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{b}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad ; \quad if \ \frac{2}{b} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow A = b\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow A = b\left[\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow A = b\,\frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$$

436ځواب)

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-b)^2 - (1)(-a^2) = b^2 + a^2$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow x = \frac{-(-b) \pm \sqrt{b^2+a^2}}{1}$$

$$\Rightarrow x = b \pm \sqrt{b^2+a^2}$$

$$\Rightarrow x = b \pm \sqrt{b^2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}$$

$$\Rightarrow x = b \pm b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad ; \quad if \ \frac{a}{b} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow x = b \pm b\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow x = b \pm b\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow x = b \pm \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow x = b\left(\frac{\cos\alpha \pm 1}{\cos\alpha}\right)$$

$$=> \begin{cases} x' = b\left(\dfrac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha}\right) = b \times \dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \dfrac{2b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} \\ x'' = -b\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) = -b\left(\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\right) = -\dfrac{2b\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} \end{cases}$$

437ځواب)

$$2\sin x - 3\cos\alpha\sin x - 2\sin\alpha\cdot\cos x = 0 => \sin x(2-3\cos\alpha) - 2\sin\alpha\cdot\cos x = 0$$

$$=> \sin x(2-3\cos\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos x$$

$$=> \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin\alpha}{2-3\cos\alpha}$$

$$=> \tan x = \frac{2\sin\alpha}{2\left(1-\dfrac{3}{2}\cos\alpha\right)}$$

$$=> \tan x = \frac{\sin\alpha}{1-\dfrac{3}{2}\cos\alpha} \quad ; \quad if\ \frac{3}{2}\cos\alpha = \tan\varphi$$

$$=> \tan x = \frac{\sin\alpha}{1-\tan\varphi}$$

$$=> \tan x = \frac{\sin\alpha}{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan\varphi}$$

$$=> \tan x = \frac{\sin\alpha}{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi}}$$

$$=> \tan = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)}$$

$$=> \tan x = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\cos\varphi}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)}$$

438ځواب)

$$A=(1-q)\cos x+2\sqrt{q}\sin x+(1+q)=>$$

$$=>A=\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos x+2\sqrt{\tan^2\frac{\alpha}{2}}\sin x+\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=>A=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cos x+\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin x+\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=>A=\frac{(\cos\alpha)\cos x+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin x+1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=>A=\frac{\cos\alpha\cdot\cos x+(\sin\alpha)\sin x+1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=>A=\frac{\cos(\alpha-x)+1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=>A=\frac{2\cos^2\frac{\alpha-x}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

439ځواب)

$$A=p^2\sin^2\alpha-q^2\cos^2\alpha=>A=p^2\cos^2\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{q^2}{p^2}\right);if\ \ \tan^2\varphi=\frac{q^2}{p^2}$$

$$=>A=p^2\cos^2\alpha(\tan^2\alpha-\tan^2\varphi)$$

$$=>A=p^2\cos^2\alpha(\tan\alpha-\tan\varphi)(\tan\alpha+\tan\varphi)$$

$$=>A=p^2\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}\cdot\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}$$

$$=>A=\frac{p^2\sin(\alpha-\varphi)\cdot\sin(\alpha+\varphi)}{\cos^2\varphi}$$

440ځواب)

یادونه) $\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

$$A = \sin 5x \cdot \sin 7x$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(5x - 7x) - \cos(5x + 7x)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(-2x) - \cos(12x)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 12x\right)$$

ځواب441)

يادونه) $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$$A = \sin 105^\circ \cos 75^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(105^\circ + 75^\circ) + \sin(105^\circ - 75^\circ)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 180^\circ + \sin 30^\circ\right)$$

ځواب442)

$$A = \sin(11^\circ, 37') \cdot \cos(78^\circ, 53')$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(11^\circ, 37' + 78^\circ, 53') + \sin(11^\circ, 37' - 78^\circ, 53')\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(89^\circ, 90') + \sin(-67^\circ, 16')\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(90^\circ, 30') - \sin(67^\circ, 16')\right]$$

ځواب443)

يادونه) $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$$A = \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{3a}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right) + \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{3a}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(2a) + \cos(-a)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(2a) + \cos(a)\right]$$

(444ځواب

$$A = \cos(18°, 27')\cos(17°, 3')$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(18°, 27'+17°, 3') + \cos(18°, 27' - 17°, 3')]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(35°, 30') + \cos(1°, 24')]$$

(445ځواب

$$A = \sin\frac{a}{3} \cdot \sin\frac{2a}{3}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{a}{3} - \frac{2a}{3}\right) - \cos\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{a}{3}\right) - \cos a\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{a}{3} - \cos a\right)$$

(446ځواب

$$A = \cos(a-b) \cdot \cos(a+b)$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(a-b+a+b) + \cos(a-b-a-b)]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(-b-b)]$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)$$

(447ځواب

$$A = \sin\left(a - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a - \frac{\pi}{3} + a + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{3} - a - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(2a) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2a - \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

448ځواب)

$$A=\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$$

449ځواب)

$$A=\sin(a+b-c)\sin(a+b+c)$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(a+b-c-a-b-c)-\cos(a+b-c+a+b+c)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(-2c)-\cos(2a+2b)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 2c-\cos(2a+2b)]$$

450ځواب)

$$A=2\sin 3x\sin x+\cos 4x$$

$$=2\times\frac{1}{2}[\cos(3x-x)-\cos(3x+x)]+\cos 4x$$

$$=\cos 2x-\cos 4x+\cos 4x$$

$$=\cos 2x$$

451ځواب)

$$A=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2\times\frac{1}{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{6}\right)\right]-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\left[\sin(2x)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\sin 2x$$

452ځواب)

$$2\sin(45+\alpha)\cdot\sin(45-\alpha)=2\times\frac{1}{2}\left[\cos(45+\alpha-45+\alpha)-\cos(45+\alpha+45-\alpha)\right]$$
$$=(\cos 2\alpha-\cos 90^\circ)$$
$$=\cos 2\alpha-0$$
$$=\cos 2\alpha$$

453ځواب)

$$\frac{2\sin\alpha\cdot\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+3\alpha)+\sin(\alpha-3\alpha)\right]}{\sin 2\alpha}$$
$$=\frac{\sin 4\alpha+\sin(-2\alpha)}{\sin 2\alpha}$$
$$=\frac{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$
$$=\frac{(2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha)-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$
$$=\frac{\sin 2\alpha(2\cos 2\alpha-1)}{\sin 2\alpha}$$
$$=2\cos 2\alpha-1$$

454ځواب)

$$\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta)-\sin\beta\cdot\sin(2\alpha+\beta)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+\alpha+2\beta)\right]-\frac{1}{2}\left[\cos(\beta-2\alpha-\beta)-\cos(\beta+2\alpha+\beta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos(-2\beta)-\cos(2\alpha+2\beta)\right]-\frac{1}{2}\left[\cos(-2\alpha)-\cos(2\alpha+2\beta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos 2\beta-\cos(2\alpha+2\beta)-\cos 2\alpha+\cos(2\alpha+2\beta)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(1-2\sin^2\beta)-(1-2\sin^2\alpha)\right]$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

(يادونه) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

455ځواب)

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(3\alpha-3\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-3\alpha+3\beta)-\cos(\alpha+\beta+3\alpha-2\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(-2\alpha+4\beta)-\cos(4\alpha-2\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}[\cos2(2\beta-\alpha)-\cos2(2\alpha-\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}[1-2\sin^2(2\beta-\alpha)-1+2\sin^2(2\alpha-\beta)]$$
$$=\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2(2\beta-\alpha)$$

يادونه) $\cos2x=1-2\sin^2 x$

456ځواب)

$$\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+2\beta)-\cos\beta\cdot\cos(2\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\alpha+2\beta)+\cos(\alpha-\alpha-2\beta)]-\frac{1}{2}[\cos(\beta+2\alpha+\beta)+\cos(\beta-2\alpha-\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\beta)-\cos(2\alpha+2\beta)-\cos(2\alpha)]$$
$$=\frac{1}{2}(\cos2\beta-\cos2\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}[(1-2\sin^2\beta)-(1-2\sin^2\alpha)]$$
$$=\frac{1}{2}(2\sin^2\alpha-2\sin^2\beta)$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

457ځواب)

$$\frac{\sin\alpha\sin2\alpha+\sin3\alpha\sin6\alpha+\sin4\alpha\sin13\alpha}{\sin\alpha\cos2\alpha+\sin3\alpha\cos6\alpha+\sin4\alpha\cos13\alpha}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}[\cos\alpha-\cos3\alpha]+\frac{1}{2}[\cos3\alpha-\cos9\alpha]+\frac{1}{2}[\cos9\alpha-\cos17\alpha]}{\frac{1}{2}[\sin3\alpha+\sin(-\alpha)]+\frac{1}{2}[\sin9\alpha+\sin(-3\alpha)]+\frac{1}{2}[\sin17\alpha+\sin(-9\alpha)]}$$
$$=\frac{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos3\alpha-\cos9\alpha+\cos9\alpha+\cos9\alpha-\cos17}{\sin3\alpha-\sin\alpha+\sin9\alpha-\sin3\alpha+\sin17\alpha-\sin9\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha-\cos17\alpha}{\sin17-\sin\alpha}$$

$$= \frac{-2\sin\frac{\alpha+17\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-17\alpha}{2}}{2\sin\frac{17\alpha-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{17\alpha+\alpha}{2}}$$
$$= \frac{-\sin 9\alpha\cdot\sin(-8\alpha)}{\sin 8\alpha\cdot\cos 9\alpha}$$
$$= \frac{\sin 9\alpha}{\cos 9\alpha}$$
$$= \tan 9\alpha$$

458ځواب)

$$\sin(3\alpha+\beta)\sin(3\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(3a+\beta-3\alpha+\beta)-\cos(3\alpha+\beta+3\alpha-\beta)]-$$
$$-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta+\alpha-\beta)]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(2\beta)-\cos(6\alpha)]-\frac{1}{2}[\cos(2\beta)-\cos(2\alpha)]$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 6\alpha-\cos 2\beta+\cos 2\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{2\alpha+6\alpha}{2}\cdot\sin\frac{2\alpha-6\alpha}{2}\right)$$
$$= -\sin 4\alpha\cdot\sin(-2\alpha)$$
$$= \sin 4\alpha\cdot\sin 2\alpha$$

459ځواب)

$$\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{8\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}$$

460ځواب)

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}=\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\frac{6\pi}{7}$$

$$=2\sin\frac{\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{2\pi}{7}-\frac{4\pi}{7}}{2}-\sin\frac{6\pi}{7}$$

$$=2\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$=2\sin\frac{3\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=2\sin\frac{3\pi}{7}\left[-2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$=4\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$=4\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{7}\right)\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$$

$$=4\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{5\pi}{7}$$

461ځواب)

$$\frac{\sin 7x}{\sin x}-2\cos 2x-2\cos 4x-2\cos 6x$$

$$=\frac{\sin 7x-2\cos 2x\cdot\sin x-2\cos 4x\cdot\sin x-2\cos 6x\cdot\sin x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin 7x-(\sin 3x-\sin x)-(\sin 5x-\sin 3x)-(\sin 7x-\sin 5x)}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin x}{\sin x}$$

$$=1$$

462ځواب)

$$\frac{1}{2\sin a}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]=\frac{1}{\sin a}\cdot\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$=\frac{1}{\sin a}\sin a\cdot\cos b$$

$$= \cos b$$

ځواب 463)

$$\begin{aligned}
A &= \tan(a+b+c) - \tan a - \tan b - \tan c \\
&= [\tan(a+b+c) - \tan a] - (\tan b + \tan c) \\
&= \frac{\sin(a+b+c-a)}{\cos(a+b+c)\cdot\cos a} - \frac{\sin(b+c)}{\cos b\cdot\cos c} \\
&= \frac{\sin(b+c)}{\cos(a+b+c)\cdot\cos\alpha} - \frac{\sin(b+c)}{\cos b\cdot\cos c} \\
&= \sin(b+c)\left[\frac{1}{\cos(a+b+c)\cos a} - \frac{1}{\cos b\cdot\cos c}\right] \\
&= \sin(b+c)\left[\frac{\cos b\cos c - \cos(a+b+c)\cdot\cos a}{\cos(a+b+c)\cos a\cdot\cos b\cos c}\right] \\
&= \sin(b+c)\left[\frac{\frac{1}{2}[\cos(b+c)+\cos(b-c)] - \frac{1}{2}[\cos(a+b+c+a)+\cos(a+b+c-a)]}{\cos(a+b+c)\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}\right] \\
&= \sin(b+c)\left[\frac{\frac{1}{2}[\cos(b+c)+\cos(b-c)-\cos(2a+b+c)-\cos(b+c)]}{\cos(a+b+c)\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sin(b+c)\frac{\cos(b-c)-\cos(2a+b+c)}{\cos(a+b+c)\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c} \\
&= \frac{1}{2}\sin(a+c)\left(\frac{-2\sin\frac{b-c+2a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b-c-2a-b-c}{2}}{\cos(a+b+c)\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(b+c)\cdot\frac{-2\sin(a+b)\cdot\sin(-(a+c))}{\cos(a+b+c)\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c} \\
&= \frac{\sin(b+c)\cdot\sin(a+b)\cdot\cos(a+c)}{\cos(a+b+c)\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}
\end{aligned}$$

ځواب 464)

$$\begin{aligned}
4\sin 20^\circ\sin 80^\circ - 2\sin 10^\circ &= 4\times\frac{1}{2}[\cos(80^\circ-20^\circ)-\cos(80^\circ+20^\circ)] - 2\sin 10^\circ \\
&= 2(\cos 60^\circ - \cos 100^\circ) - 2\sin 10^\circ \\
&= -2\cos 100^\circ + 2\cos 60^\circ - 2\sin 10^\circ
\end{aligned}$$

$$= -2\cos(90^\circ + 10^\circ) + 2\cos 60^\circ - 2\sin 10^\circ$$
$$= -2(-\sin 10) + 2 \times \frac{1}{2} - 2\sin 10^\circ$$
$$= \sin 10^\circ + 1 - 2\sin 10^\circ$$
$$= 1$$

465ځواب)

$$4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+2\gamma+\beta}{2}\right]$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+2\gamma+\beta}{2}$$
$$= \sin\alpha + \sin\beta - [\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin\gamma]$$
$$= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

466ځواب)

$$\frac{1 - 3\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1 - 4\times\frac{1}{2}[\cos(70^\circ - 10^\circ) - \cos(70^\circ + 10^\circ)]}{\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{1 + 2\cos 80^\circ - 2\cos 60^\circ}{\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{1 + 2\cos 80^\circ - 2\times\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{2\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ}$$
$$= \frac{2\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}$$
$$= 2$$

467ځواب)

$$\frac{2\sin a\cdot\cos 3a}{\sin 2a} = \frac{2\times\frac{1}{2}[\sin(a+3a) + \sin(a-3a)]}{\sin 2a}$$

$$= \frac{\sin 4a - \sin 2a}{\sin 2a}$$
$$= \frac{2\sin 2a \cdot \cos 2a - \sin 2a}{\sin 2a}$$
$$= \frac{\sin 2a(2\cos 2a - 1)}{\sin 2a}$$
$$= 2\cos 2a - 1$$

468ځواب)

$$4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} = 2\left(2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2} + 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= \cos\frac{A+B+C}{2} + \cos\frac{A+B-C}{2} + \cos\frac{A-B+C}{2} + \cos\frac{A-B-C}{2}$$

$$A+B+C = \pi \Rightarrow \frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{A+B+C}{2} = \cos\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \cos\frac{A+B+C}{2} = 0$$
$$A+B+C = \pi \Rightarrow A+B+C-2B = \pi - 2B$$
$$\Rightarrow A-B+C = \pi - 2B$$
$$\Rightarrow \frac{A-B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - B$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{A-B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$
$$\Rightarrow \cos\frac{A-B+C}{2} = \sin B$$
$$A+B+C = \pi \Rightarrow A+B+C-2C = \pi - 2C$$
$$\Rightarrow A+B-C = \pi - 2C$$
$$\Rightarrow \frac{A+B-C}{2} = \frac{\pi}{2} - C$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A+B-C}{2} = \sin C$$

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A+B-2B+C-2C = \pi - 2B - 2C$$

$$\Rightarrow A-B-C = \pi - 2(B+C)$$

$$\Rightarrow \frac{A-B-C}{2} = \frac{\pi}{2} - (B+C)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A-B-C}{2} = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (B+C)\right]$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A-B-C}{2} = \sin(B+C)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A-B-C}{2} = \sin A$$

$$\cos\frac{A+B+C}{2} + \cos\frac{A+B-C}{2} + \cos\frac{A-B+C}{2} + \cos\frac{A-B-C}{2}$$

$$= 0 + \sin C + \sin B + \sin A$$

ځواب)469

له دې چې کمانونه د $d = x$ نسبت سره د عددي تصاعد جوړونکي دي، نو لرو چې:

$$A = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin nx\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[2\times\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + 2\times\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots +\right.$$

$$\left. + 2\times\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$=\frac{2\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

470ځواب)

له دې چې کمانونو د $d = x$ نسبت سره د عددي تصاعد جوړونکي دي، نو لرو چې:

$$A=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x$$

$$=\frac{2\sin\frac{2x}{2}}{2\sin\frac{2x}{2}}\left[\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}\left[2\sin x\cdot\cos x+2\sin x\cdot\cos 3x+2\sin x\cdot\cos 5x+\cdots+2\sin x\cdot\cos(2n-1)x\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}\left[\sin 2x+(\sin 4x-\sin 2x)+(\sin 6x-\sin 4x)+\cdots+(\sin 2nx-\sin 2(n-1)x)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}(\sin 2nx)$$

$$=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

471ځواب)

$$A=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1+\cos 2nx}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left[n+\underbrace{(\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2nx)}_{y}\right]$$

$$y=\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos nx$$

له دې چې کمانونو د $d = x$ نسبت سره د تصاعد جوړونکي دي، نو لرو چې:

$$y=\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos nx$$

$$=\frac{2\sin\frac{2x}{2}}{2\sin\frac{2x}{2}}(\cos x+\cos 4x+\cdots+\cos nx)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{2x}{2}}(2\sin x\cdot\cos 2x+2\sin x\cdot\cos 4x+\cdots+2\sin x\cdot\cos nx)$$

$$=\frac{1}{2\sin x}\left[(\sin 3x-\sin x)+(\sin 5x-\sin 3x)+(\sin 7x-\sin 5x)+\cdots+\right.$$

$$+\sin(n+1)x-\sin(n-1)x$$
$$=\frac{1}{2\sin x}[\sin(n-1)x-\sin x]$$
$$=\frac{2\sin\frac{(n-1)x-x}{2}\cdot\cos\frac{(n-1)x+x}{2}}{2\sin x}$$
$$=\frac{\sin\frac{(n-2)x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}}{\sin x}$$

$$A=\frac{1}{2}[n+y]=\frac{1}{2}\left[n+\frac{\sin\frac{(n-2)x}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}}{\sin x}\right]$$

472ځواب)

لومړی لوری له $2\sin\frac{\pi}{7}$ سره ضرب او تقسيموو:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$
$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{4\pi}{7}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)+sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(-\sin\frac{\pi}{7}+0\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

473ځواب)

لومړی لوری له $2\sin\frac{\pi}{7}$ سره ضرب او تقسیموو:

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{6\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\frac{\pi}{7}+1\right)$$

$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\pi}{14}}{2\times2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$$

474ځواب)

لومړي لوري له $2\sin\frac{\pi}{14}$ سره ضرب او تقسيموو:

$$\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}}\left(\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}}\left(2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$$

475ځواب)

لومړی لوری له $2\sin\frac{\pi}{13}$ سره ضرب او تقسيموو

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{13}}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left(2\sin\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{3\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{5\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\right.$$

$$\times\cos\frac{7\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cdot\cos\frac{9\pi}{13}+2\sin\frac{\pi}{13}\cdot cos\frac{11\pi}{13}\Bigg)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\left(\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{4\pi}{13}-\sin\frac{2\pi}{13}+\sin\frac{6\pi}{13}-\sin\frac{4\pi}{13}+\sin\frac{8\pi}{13}-\sin\frac{6\pi}{13}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{10\pi}{13}-\sin\frac{8\pi}{13}+\sin\frac{12\pi}{13}-\sin\frac{10\pi}{13}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{13}}\cdot\left(\sin\frac{12\pi}{13}\right)=\frac{\sin\frac{12\pi}{13}}{2\sin\frac{\pi}{13}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{13}\right)}{2\sin\frac{\pi}{13}}=\frac{\sin\frac{\pi}{13}}{2\sin\frac{\pi}{13}}=\frac{1}{2}$$

476ځواب)

لومړی، لوری له $2\sin\frac{\pi}{13}$ سره ضرب او تقسیموو:

$$\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{3\pi}{15}+\cos\frac{5\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{15}+\cos\frac{9\pi}{15}+\cos\frac{11\pi}{15}+\cos\frac{13\pi}{15}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}}\left(\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{3\pi}{15}+\cos\frac{5\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{15}+\cos\frac{9\pi}{15}+\cos\frac{11\pi}{15}+\cos\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{15}}\left(2\sin\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{\pi}{15}+2\sin\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{3\pi}{15}+2\sin\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{5\pi}{15}+2\sin\frac{\pi}{15}\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{7\pi}{15}+2\sin\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{9\pi}{15}+2\sin\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{11\pi}{15}+2\sin\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{15}}\left(\sin\frac{2\pi}{15}+\sin\frac{4\pi}{15}-\sin\frac{2\pi}{15}+\sin\frac{6\pi}{15}-\sin\frac{4\pi}{15}+\sin\frac{8\pi}{15}-\sin\frac{6\pi}{15}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{10\pi}{15}-\sin\frac{8\pi}{15}+\sin\frac{12\pi}{15}-\sin\frac{10\pi}{15}+\sin\frac{14\pi}{15}-\sin\frac{12\pi}{15}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{14\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{15}\right)}{2\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{\sin\frac{\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{1}{2}$$

477ځواب)

$$A\hat{O}H=\alpha$$

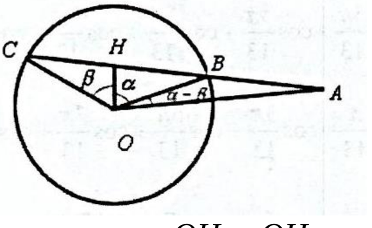
$$B\hat{O}H=H\hat{O}C=\beta$$

$$A\hat{O}B=\alpha-\beta \quad , \quad A\hat{O}C=\alpha+\beta$$

$$\tan\frac{A\hat{O}B}{2}\cdot\tan\frac{A\hat{O}C}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)}$$

$$=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\frac{OH}{R}-\frac{OH}{a}}{\frac{OH}{a}+\frac{OH}{R}}=\frac{OH(a-R)}{OH(a+R)}=\frac{a-R}{a+R}$$



$$=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\frac{OH}{R}-\frac{OH}{a}}{\frac{OH}{a}+\frac{OH}{R}}=\frac{OH(a-R)}{OH(a+R)}$$

$$=\frac{OH(a-R)}{OH(a+R)}=\frac{a-R}{a+R}$$

ځواب478)

يادونه) $if \ : \arcsin x=\alpha <=> \sin\alpha = x$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha => \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=> \alpha=\frac{\pi}{2}$$

ځواب479)

يادونه) $\arcsin=\begin{cases}2k\pi+\alpha\\ 2k\pi+\pi-\alpha\end{cases}\Big\rangle \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases}$