بسم الله الرحمن الرحيم

ډالۍ

وړې لور اقليما ليلا جانې ته چې اقتصاد برخه کې يې زده کړې کړي او اوس استراليا هېواد کې ميشت ده!

نوي رياضيات

10

د پولینومونو تقسیم

لیکوال: پیمان گردلو

ژباړنه: استاد پښتون گل رسولي

پته: آسمايي واټ، سعيد خپرنځی، کابل - افغانستان

اړيکه: 0707575935 او 0788100157

Email: Shirahmad_saedy@yahoo.com

کتاب پېژندنه

• **کتاب**: د پولينومونو تقسيم

• **ليکوال**: پيمان ګُردلو

• **ژباړنه**: استاد پشتون ګل رسولي

• **کمپوز او ډيزاين**: انجنيرمحمدافضل ذاکر او انجنير عبدالوهاب همت

• **علمي ايډيټ**: پوهاند ډاکټر محمد انور غوري

• **ژبنی ايډيټ**: انجنير عبدالباقي سلطاني

• **له اصل سره د فورمولونو پروف کتنه**: انجنيرعبدالوهاب همت، انجنير محمدافضل ذاکر، انجنير عبدالباقي سلطاني، انجنير تاج محمد جاهد، کاشف وردګ، وارث سمسور، اميد زرغون، عصمت وردګ، جاويد نعمتي

• **خپرندوی**: سعيد خپرنځی، • **چاپځای**: سعيد

• **شمېر**: 1000 ټوکه، • **چاپ وار**: لومړی، • **چاپ کال**: 1397 لمريز

• **کچه**: وزيری، • **صفحې**: 102 صفحې

بيه: **120** افغانی

یادښت

غرب یو مهال د طبیعي علومو ترجمه کوله او په دغه علمي حوزه کې يې ځکه پيداوار نه درلود، چې کلیسا د غربي فکر واګی په لاس درلـود، خلک يې له طبیعي څېړنو، معنوي افراطیت تـه قیـزه کـړي وو، حتـی د تجربي علومو له لورې نـوي عرضـه شـوي مفـاهیم بـه چـې د کلیسـا لـه موخو سره په ټکر کې وو، کتمان کېدل او څرګنـدونکي بـه يـې پـه عـام محضر کې وژل کیدل؛ یعنې د بکر فکر جرأت او په طبیعي علومـو کـې تصرف په مرګ منتهي کیده. د کلیسا مسـتبد فشـارونو خلـک پـه تنـګ کړل، چون فشار فاصلې له منځه وړي، نو د کلیسـا پـر وړانـدې مردمـي یووالی(انقلاب) رامنځته شو؛ د انسـاني علومـو یـو اصـل دی وایـي «هـر افراط تفریط او هر تفریط افراط زیږوي»، نو د کلیسا افراطي چلن باعث شـو چـې غـربي انسـان لـه دغـه علمـي انقـلاب (رنسـانس) وروسـته پـه معنویاتو کې له تفریطه کار واخلي او مادي برخه کې افراط وکړي.

افغانستان هم په طبیعي علومو کې چندان سابقه نلري، حتی په دغـه شق کې د سل‌کلن تاریخ مدعي نه ګڼـل کیـږي، ددې لپـاره چـې افغـان انسان په دغه علمي برخه کې موزون او غیرافراطـي ګامونـه واخـلي، نـو د ښاغلي احمدفهیم‌سپین‌غر په مشرۍ مـو پـه ۱۳۸۸ کـال کـې زرغـون د څېړنې او ژباړې مرکز ایجاد کـړ، د زرغـون لیـدلوری پـه افغانسـتان کـې د ساینس فرهنګ او زرغونې انرژۍ وده ده، چې د ساینسي کتـابونو، رسـالو او مقـالو ژبـاړل، پـه ساینسيـ موضـوعات څېړنـې کـول، د سـیمینارونو او کنفراسـونو تـدویرل مـو کـاري لومړیتوبونـه وو، مـوږ لـس ګونـه ساینسيـ کتابونـه وژبـاړل او لـه دې سره جوخـت مـو د افغانسـتان پـه تـاریخ کـې د لومړي ځل لپاره «افغان طبیعي علومو ټولنه» چې د افغـان سـاینس‌پوهانو لپاره د راټولیدلو ځای دی ایجاد کړه، هوډ لرو چې ددغه هلوځلو په پایلـه کې افغانستان د طبیعي علومو او تکنالوژۍ په تولید کې برخـه واخـلي او له مصرفـي حالتـه راووزي. لـه ټولـو هغـو فرهنګپـالو پـه ځـانګړي ډول لـه شیراحمد سعیدي، حـاجي نـذیر خروټـي او انجنیـر عبـدالباقي سـلطاني څخه مننه کوم چې فرهنګي چارو ته ځانګړې پاملرنه کوي.

انجنیرمحمدافضل‌ذاکر

د زرغون څېړنې او ژباړې مرکز مشر

د ژباړنې خبرې

ستاسې مخې ته پروت کتاب د رياضي د لړۍ يوه کړۍ ده، د دغه يووېشت ټوکو لړۍ کتابونه په ترتيب عبارت دي له: سيټ، توان، الجبري افادې، الجبري مطابقتونه، د الجبري افادو تجزيه، جذر، لومړۍ درجه افادې، دويمه درجه افادې، نامساوات، د پولينومونو تقسيم، دکارتي هندسه، مثلثات۱، مثلثات۲، مطلقه قيمت، زينه‌يي تابع(صحيح جز)، لوگارتم، تابع، ليمټ، متماديت، مشتق او د مشتق کارونې څخه. دغه لړۍ د رياضي ټولو شايقينو ته ده چې په لوست سره يې په رياضي برخه کې هر ډول ستونزه حل کېدلی شي.

کابو ديرش کاله مې د رياضي او فزيک تدريس کړی، ډېری وخت به د ديپارټمنټ همکارانو راته کړل: «شاگردان په رياضي کې غبي دي، نه پوهيږو څه ورسره وکړو». په دې هکله له فکر وروسته مو درک کړه چې ستونزه په شاگردانو کې نه ده بلکې د دغه ستونزې لمن پراخه ده او نور ډېر فکټورونه په ځان کې لري. موږ شايد کله هم فکر نه وي کړی چې درسي نصاب څومره د زده کوونکو له اړتياوو سره سم جوړ دی؟ شايد پام مو نه وي شوی چې څرنگه درسي پلان جوړ کړو ترڅو له رياضي سره د زده کوونکو مينه زياته شي؟ شايد موږ معلمينو کله هم خپل سر گريوان ته نه وي کړی او له ځانه مو نه وي پوښتلي چې ايا زما د تدريس طريقه سمه ده، که نه؟ نو بناً ويلی شو چې که شاگرد رياضي نشي- زده کولی بايد له شاگرد سره جوخت، درسي نصاب، درسي پلان او د خپل تدريس طريقه هم وارزوو.

رياضي هغه وخت ښه تدريس کېدلی شي چې د نصاب کارپوهان درسي نصاب د ښوونکو سره په مشوره او د شاگردانو له ورځنيو اړتياوو سره سم جوړ کړي. ښوونکي بايد درسي پلان او د تدريس طريقه د شاگردانو په خوښه وټاکي داسې نه خدای مه کړه له يوې خوا د رياضي محتوايي وچوالی او له بل لوري د ښوونکي نامناسبه درسي طريقه باعث شي ترڅو ابداً له رياضي څخه د شاگرد زړه تور شي. اصولاً په ټوله نړۍ کې دا باب دی چې د يوې برخې کارپوه په خپله کاري حوزه کې له کلونو کار وروسته په ليکلو يا ژباړلو پيل کوي. زه هم د رياضي او فزيک برخې د متقاعدې استادې په توگه هڅه کوم چې مناسب متنونه په رياضي او فزيک برخه کې را وژباړم ترڅو د درسي موادو له درکه د شاگردانو او ښوونکو ستونزه تر يوه بريده حل شي. د اوس لپاره خو د رياضي دغه لړۍ وگورئ، که عمر باقي و، نورې هڅې به هم کوو.

کاميابي مو غواړم

پشتون گل رسولي

سریزه

له مهربان خدای څخه مننداوی یم چې په ډېر صداقت، تمایل او پرته له ریا مې علم پالو کسانو ته یو څه خدمت وکړ.

هڅه مې کړې چې کتاب له گونگوالي او اغماضه خالي وي، خدای وکړي زموږ دا هڅه د علمي ټولنې د منلو وړ وگرځي.

د ټولو استادانو او په ځانگړي توگه د «نسل نو اندیش» خپرنځي مسؤل ښاغلي بېژن علیپور څخه مننه کوم چې په دې برخه کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې وکړې، ارامه او کامیاب ژوند ورته غواړم.

پیمان گردلو

ژمی ۱۳۸۵

د دغه لړۍ په هکله څو خبرې

د پيمان ګردلو، د رياضي مسلسل او مهم يوويشت ټوکه کتابونه په لاندې ډول دي:

1. سيټونه	2. توان	3. الجبري افادې
4. الجبري مطابقتونه	5. د الجبري افادو تجزيه	6. جذر
7. لومړۍ درجه افادې	8. دويمه درجه افادې	9. نامساوات
10. د پولينومونو تقسيم	11. دکارتي هندسه	12. مثلثات (لومړی ټوک)
13. مثلثات (دويم ټوک)	14. مطلقه قيمت	15. زينه‌يي تابع
16. لوګارتم	17. تابع	18. ليمټ
19. متماديت	20. مشتق	21. د مشتق کارونې

د رياضي دغه لړۍ د ښوونځيو لپاره د مرجع حيثيت لري او په رياضي برخه کې د لوړو زده کړو لپاره بنسټ جوړوي. په دې کتابونو کې ټول مباحث په خورا دقت او د جزئياتو په پام کې نيولو سره تر بحث لاندې نيول شوي او ټول موضوعات د بې ساري او بېلابېلو مثالونو په بيان سره بدرګه کېږي.

ددغه لړۍ ټول کتابونه ګرانې خور استاد پشتون‌ګل رسولي له فارسي څخه پښتو ته په پخو ادبياتو او خوږو عباراتو په برياليتوب سره ترجمه کړي. بې له شکه دا لوی کار د ګران هېواد د ځوان نسل لپاره ستر خدمت او د وطن دوستۍ صريح ننبه بلل کېږي.

د الله پاک څخه د استاد لپاره د نورو برياليتوبونو هيله من يم.

پوهاند ډاکټر محمدانور غوري

د کابل پوهنتون د رياضي پوهنځي رئيس

یادښت

تاریخ راته وایي چې هر ډول ټولنیز-اقتصادي تحول د مادي وسایلو له تحول سره کلک تړلی دی. بلخوا، غوڅ اکثریت مادي تحولاتو کې فزیک فعاله ونډه لرلې ده، یعنې فزیک د معاصر انسان په نړۍلید کې اساسي نقش لوبولی.

هېڅ علم له فلسفې سره دومره اُرگانیکه اړیکه نلري لکه فزیک یې چې لري. پخوا زمانو کې به دیني حلقاتو ته منسوب بني‌ادمان د فزیک له ودې بېریدل، ځکه فزیک نړۍ هغسې معرفي کوي څرنگه چې ده. د هغه وخت دخلکو دغه بېره د فزیک په فلسفي بُعد دلالت کوي، اما په فزیک کې د نسبیت، کوانتم او سترینگ تیوري منځته راتلل په مطلق ډول فزیک د فلسفې د جز په توگه تائید کړ.

بالمقابل د فزیک د محصل په توگه په دې باوري یم چې په قاطع توگه د فزیک په وده کې ریاضي اساسي نقش درلودلی او لري یې. که موږ د فزیک هرې برخې ته ځېر شو نو ریاضي به پکې ووینو. ځکه د طبیعت ټول اجزاء یوه بل پورې اړوند دي او د اجزاوو دغه اړیکه د تابع په مرسته ښودل کېږي تابع او د تابع اجزاء(لیمت، مشتق او انتیگرال) د فزیک کُلیات جوړوي.

اوس که څوک د بشري تحول په هکله گړابي نو باید د ریاضي-فزیک په نقش او کارکړو بلد وي، تر څو په سمه توگه د بشري ارتقا او اقتصادي-ټولنیزو مناسباتو وړاندوینې وکړلی شي. یا که څوک له فلسفي مباحثو سره مینه لري او فلسفه کې دننه تلل غواړي نو باید د ریاضي-فزیک په اساساتو پوه وي، کنه نو سفسطې به غږوي. یا که څوک د تکنالوژۍ ماهر کېدل غواړي نو باید چې ریاضي-فزیک ته په کمه سترگه ونه گوري.

کله چې محصل وم په ساینس برخه کې د درسي وثایقو پسې به لالهانده وم. معتبرې علمي منابع به کمي یا اصلا نه وي ځکه خو مو د احمدفهیم سپین‌غر په مشرۍ په دغه علمي حوزه کې د یو لړ علمي کارونو د ترسره کولو هوډ وکړ. د دغو هڅو لړۍ دا ده نن د ریاضي برخې د دایره‌المعارف چاپېدو ته را ورسېدله. د ریاضي دغه جامع لړۍ چې ستاسې په لاس کې ده، آغلې استاد پشتون‌گل رسولي ژباړلې، تر کومه ځایه چې مې ژباړه لوستې موزونه او متوازنه ده. اصل کتاب کې هم د موضوعاتو تسلسل تر ډېره رعایت شوی، خو له دې چې د دایره‌المعارف یا مرجع حیثیت لري، نو ځینې ځایونو کې ځینې موضوعات تر وخت د مخه هم راغلي. خو په ټوله کې دغه لړۍ ټولو زده کوونکو، محصلینو او د ریاضي مینه والو ته گټوره تمامېدلی شي، ویې پېرئ، زده یې کړئ او ورزده یې کړئ.

تاسې جار شم

انجنیر مطیع الله هوتک

د افغان طبیعي علومو ټولنې مؤسس

۱۳۹۶-۱۲-۱۵ سه شنبه د شپې یوولس نیمې بجې

رياضي د علومو مبادي ده

هنر له کيفيت سره او علوم له کميت سره کار لري، يعنـې کلـه کلـه يـو فـرد شـعر نسبت يوه اوږد شعر ته ډېر تـاثير لـري، ځکـه شـعر هـنر دی او پـه هـنر کـې اصـل، کيفيت دی نه کميت. بالمقابل دوه ماليکوله هايدروجن له يوه ماليکول اوکسـيجن سره يو ځای کېږي اوبه جوړوي، دلته بحث د اوکسيجن او هايدروجن د مـاليکولونو پر کيفيت نه، بلکې پر کميت يې دی. يعنې له دريو ماليکولونو هايـدروجن او څلـور ماليکولونو اوکسيجن څخه هېڅکله اوبه نشو ترلاسه کولی. ځکه خو وايو هنريت لـه کيفيت او علميت له کميت سره تړاو لري او د کميت بيان يوازې د رياضي په مرسته شونی دی.

بناً کله چې د علومـو اسـاس کميـت وي او د کميـت بيـان د ريـاضي پـه مرسـته ممکن وي، خود به رياضي د ټولـو علومـو مبـادي ګڼـل کېـږي. ريـاضي تـه ځکـه د علومـو مبـادي وايـي، چـې پرتـه لـه هغـې د نـورو علومـو حصـول نـاممکن دی. پـه انجنيـرۍ کـې د کانـال ميـل يـا د سـړک ميـل د تانجانـت پـه مرسـته معلومـوي او تانجانت د رياضي موضوع ده. په برق-فزيک کې وايي کلـه چـې مقاومـت زيـاتيږي، امپير کمېږي د امپير او مقامت دغه رابطه د معکوس تناسب په ذريعه ښودل کېږي او معکوس تناسب د رياضي مبحث دی. په کيميا کې غلظت مساوي کېـږي پـه (د هايدروجن د شمېر-منفي لوګارتم)، لوګارتم هم د رياضی بحث دی. ان سـوداګري هم د رياضي په مرسته کېږي، تخفيـف، د ګټـې فيصـدي او کميشـن د ريـاضي پـه مرسته معلوميږي. يعنې که يو انجنير په تانجانت نه وي پوه، ميل نشيـ معلومـولی. همدارنګه که د فزيکپوه تناسب نه وي زده، د امپير او مقاومت اړيکـه نشيـ ښـودلی او کـه د کيميـاپوه لوګـارتم نـه وي زده، غلظـت نشيـ معلومـولی. او يـو سـوداګر پـه حساب د نه پوهېدو له وجهې ممکن موفق سوداګر ونه اوسي.

اوس نو که څوک علومو ته لاسرسی غواړي، نو لومړی دی رياضي په اسـاسي توګـه زده کړي. د رياضي د زده کړې لومړی شرط معتبرو منابعو تـه لاسرسـی دی، لـه نيکـه بختـه ستاسـې پـه لاس کـې د ريـاضي دغـه يوويشـت ټوکـه لـړۍ چـې آغلـې اسـتاد پشتون‌ګل رسولي، پښتو ژبې ته ترجمه کړې، متعلمينو او محصلينو ته د يـوې مـؤثرې او معتبرې مرجع په توګه واقع کېدلی شي. ارزو لرم، دغه لړۍ بار بار ولولۍ او مثالونه يې له ځانه سره تکراراً کار کړئ په دې توګه به مو د ټولو علومو الفبا زده کړې وي.

انجنيرغلام‌نقيب‌رسولي

د اوبو او برېښنا وزارت متقاعد انجنير

رياضي (د کائناتو ژبه)

څلور پېړۍ مخکې (1610 کال کې)، کله چې ګاليله ځرګنده کړه چې ځمکه د لمر په چاپېر چورلي، نو د کايناتو ژبه يې رياضيکي ژبه وبلله او مثلثونه، دايرې او نور هندسي شکلونه يې د دې ژبې توري وبلل. ګاووس رياضيات "د علومو ملکه" بللې. په 2010 کې معاصر رياضي‌پوه، "پروفيسور ډيو سوټ وي" وويل: "يقيناً تلسکوپونه او مايکروسکوپونه، کتنې او تجربې يو نقش لري چې بايد و يې لوبوي، خو زه باور لرم چې د معاصر ساينس تر شا اصلي چلوونکې قوه رياضيات دي." د دې خبرو او د ورځنې پديدو پر بنسټ ټول د رياضياتو پر اهميت پوهېږي او انکار ترې نشي کېدلی. خو پر دومره ستر اهميت سربېره موږ په دې برخه کې د نورو برخو په څېر تر هر چا خوار يو. ځکه نه په نورو ژبو پوهېږو او نه په خپلو ژبو کافي مواد لرو.

د پوهنتونونو د محصلينو تر ټولو ستره ستونزه له درسي موادو سره ده. کله چې محصل وم، تقريباً ټول کتابونه مو په انګلسي وو، خو زياتره محصلين يا خو په انګليسي نه پوهېدل يا خو ډېر کم پرې پوهېدل. دوی ته به تر ټولو ښه خبر دا و چې کوم چا به کوم درس وژباړه. له بلې خوا په نورو پوهنځيو کې ستونزه دا وه چې درسي مواد يې اصلاً د پوهېدلو وړ نه وو. درسي چپټرونه خو يا پخواني دي او يا هم په ډېر بې کيفيته ډول ليکل شوي يا ژباړل شوي دي. باور لرم که مو په خپلو ژبو کې با کيفيته درسي مواد لرلی، د لوړو زده کړو حالت به له اوسني هغه څخه په ځلونو غوره و.

لومړی ځل دی چې په رياضياتو او په ټوله کې د ساينس په برخه کې په دومره شمېر کتابونه ژباړل کېږي او خپرېږي، يو کال مخکې په ټول هېواد کې څه باندې سل کتابونه چاپ شوي وو چې زياتره يې د سياسي او ټولنيزو کتابونو ژباړې وې. دغه کتاب د رياضي د يووشتو کتابونو له سلسلې څخه يو کتاب دی، له دې ور هاخوا د دې کتابونو او د ژباړې په اړه يې ځينې ټکي شته دي، چې دا کتابونه له نورو څخه بېلوي. ټول کتابونه يوه لړۍ ده او يوه ليکوال ليکلې. ټول کتابونه ، يوې ژباړنې ژباړلي، چې پر رياضياتو او نورو ساينسي-مضمونو هم ښه برلاسی لري، کلونه کلونه يې تدريس کړي، او هم د ژباړې او ليکنې تجربه لري. د دې کتابونو د ژباړې په اړه مهمه خبره دا ده چې له دقيق ايډېټ او بيا کتنې وروسته يو ځای خپرېږي.

باور لرم چې دا کتابونه د ښوونځيو او کورسونو د زده کوونکو او د انسټېټونو او پوهنتونونو د محصلينو لپاره، په افغانستان کې غوره درسي مواد او د مطالعې لپاره د رياضياتو تر ټولو غوره کتابونه دي، او د رياضياتو په برخه کې د زده کوونکو ستونزې تر ډېره حلولی شي. دا کتابونه بايد هر افغان زده کوونکي او محصل ته ورسول شي. راځئ چې دا کتابونه تر هره کوره او تر هر ټولګي پورې ورسوو.

استاد پشتون ګل رسولي ته د دې ستر کار مبارکي وايم، الله د پوره صحت، اوږد عمر او د ساينس او ژباړې په برخه کې لا حوصله او توفيق ورکړي.

انجنير عبدالباقي سلطاني

لړلیک

سرلیک	مخګڼه

1. سریزه

که $P_n(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ پولینـوم پـر $g_m(x)=b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ پولینـوم تقسیم کړو او د دغه تقسیم، باقیمانـده پـه $R_{m-1}(x)$ او د دغـه تقسـیم خـارج قسـمت پـه $q_{n-m}(x)$ وښیو وبه لرو چې:

$$P_n(x)=g_m(x)\cdot q_{n-m}(x)+R_{m-1}(x)$$

باید وویل شي چې پاسني انډکسونه د پولینوم د درجې ښکارندويي کوي، یعنې:
n او $n-m$ او $m-1$ په ترتیب د $P(x)$ او $g(x)$ او $R(x)$ پولینومونو درجې دي.
د خارج قسمت او باقیمانده د ټاکلو انډکسونو د توضح لپاره کولی شو ووایو:
پر $g_m(x)$ د $P_n(x)$ له تقسیم څخه په خارج قسمت کې تر ټولو لوړ توان لرونکی حد عبارت دی له:

$$\frac{a_o x^n}{b_o x^m}=\frac{a_o}{b_o}x^{n-m}$$

په حقیقت کې دغه حد، د خارج قسمت درجـه ټـاکي، پـه همـدې خـاطر د $q(x)$ درجـه مسـاوي ده پـه $n-m$.

د باقیمانده لپاره ټاکل شوې درجه په دې خاطر ده، چې پر مقسوم علیه د مسقوم د تقسیم عملیه هغـه مهال پای ته رسېږي چې باقیمانده حداقل یوه درجه د مقسوم علیه له درجې څخـه لـږ وي، پـه همـدې دلیل د باقیمانده درجه معمولاً $m-1$ ده.

1 **مثال)** په یوه تقسیم کې که د باقیمانده درجه 4 او د خارج قسمت درجه 7 وي، د مقسوم درجه څـو ده؟

2. پر $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم د تقسیم وړتیا

لاندې تقسیم ته پام وکړئ:

$$P(x)\,\Big|\,\underline{(x-a)}_{\;q(x)}$$

$$\vdots$$

$$\bar{R}$$

څرنگه چې د مقسوم علیه درجه $m=1$ ده، د باقیمانده درجه $m-1=1-1=o$ ده، یعنې باقیمانده R ته ورته یو حقیقي عدد دی.

د $P(x)$ په پام کې نیولو سره د باقیمانده د قیمت ترلاسه کولو لپاره اړینه ده چې د مقسوم علیـه جـذر په مقسوم کې وضع کړو:

$$\left.\begin{cases}P(x)=(x-a)q(x)+R\\ x-a=0 \Rightarrow x=a\end{cases}\right\rangle P(a)=(a-a)q(a)+R \Rightarrow P(a)=R$$

یادونه:

پر $x-a$ د $P(x)$ د تقسيم د وړتيا شرط دا دی چې باقيمانده بايد صفر شي يعنې: $P(a)=R=0$

پايله:

فرضوو $P(x)$ او a د حقيقي اعدادو سيستم، يعنې R اړوند دي، په دې صورت کې پر $x-a$ د $P(x)$ باقيمانده مساوي ده په:

$P(x)$

$x-a$ د $P(x)$ يو فکتور دی که او يوازې که $P(x)=0$ وي.

$x=0$ د $p(x)=0$ يو جذر دی که او يوازې که $x-a|p(x)$ وي.

پر دې اساس که $x=a$ د $P(x)$ يو جذر وي، $q(x)$ پولينوم موجود دی، داسې چې $P(x)=(x-a)q(x)$ وي.

2 **مثال)** په $p(x)=x^4+ax^3+3x^2+4x+1$ ، پولينوم کې a داسې وټاکئ چې $P(x)$ پر $(x+a)$ د تقسيم وړتيا ولري.

3 **مثال)** s او k داسې وټاکئ چې $p(x)=x^5+kx^3+sx^2+3$ پولينوم پر $x-1$ د تقسيم وړتيا ولري او پر $x+1$ يې د تقسيم باقيمانده مساوي په -4 وي.

4 **مثال)** که $P(x)=x^7-3x^5+x^2-1$ پولينوم پر $x+1$ تقسيم کړو باقيمانده يې ترلاسه کړئ.

5 **مثال)** که $P(x)=x^3+3x^2+3x$ پولينوم پر $x-a$ تقسيم کړو او باقيمانده مساوي په 26 شي، a ترلاسه کړئ.

6 **مثال)** که $P(x)=4x^3+mx^2-3x+6$ پر $x-2$ د تقسيم وړ وي m ترلاسه کړئ.

7 **مثال)** a او b او c داسې ترلاسه کړئ چې $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x+c$ پولينوم پر $x-1$ د تقسيم وړتيا ولري او پر $x-2$ يې باقيمانده مساوي په -3 او پر $x+1$ يې مساوي په 2 وي.

8 **مثال)** a او b داسې ترلاسه کړئ چې، $P(x)=x^2+ax^2+bx-2$ پولينوم پر $x-2$ د تقسيم وړتيا ولري او باقيمانده يې پر $x-1$ مساوي په -7 وي.

9 **مثال)** ددې لپاره چې $P(x)=(x-a)(x-b)+k$ افاده پر $x-a-b$ د تقسيم وړ وي اړينه ده چې k څله وي؟

10 **مثال)** که د $P(x)$ پر x^3-3x+2 باقيمانده مساوي په x^2+4x+4 وي ، د $P(-2)$ مقدار ترلاسه کړئ .

11 **مثال)** که $P(x)=mx^{m+1}-(m+1)x^m+1$ افاده پر $(x-1)^2$ تقسيم شي، خارج قسمت يې ترلاسه کړئ. $(m\in N)$

12 **مثال)** که د $p(x)$ پر $4x-1$ باقيمانده مساوي پر R وي، د $p(x)$ پر $x-\frac{1}{4}$ باقيمانده څو ده.

13 **مثال)** که د $p(x)$ پر $x-1$ باقيمانده مساوي په 2 وي، د $p(x^3)$ پر $x-1$ باقيمانده څومره ده؟

14 **مثال)** که د $p(x)$ پر x^2+1 باقیمانده مساوي پر 4 وي، د $p(x^3)$ پـر (x^4-x^2+1) باقیمانـده ځومره ده.

یادونه)

د دې ټکې د مطرح کولو لپاره لاندې مثال ته پام وکړئ، چې د یوې دویمه درجه معـادلې د حـل اړونـد دی.

$$3x^2+5x+2=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{-2}{3}$$

$$3x^2+5x+2=0 \Rightarrow 3x^2+5x=-2$$

$$\Rightarrow x(3x+5)=-2$$

$$if \quad x_1=-1\in z \Rightarrow (-1)[3(-1)+5]=-2$$

یعنې سم جذر $x_1=-1$ دی، چې د -2 ثابت عدد مقسوم علیه دی.

$$if \ \ x_2=\frac{-2}{3}\in Q \Rightarrow \left(\frac{-2}{3}\right)\left[3\left(\frac{-2}{3}\right)+5\right]=-2$$

$x_2=-\frac{2}{3}$ د دویمه درجه معادلې ناطق جذر دی چې صورت یې د (-2) مقسـوم علیـه دی او مخـرج یې د x^2 ضریب مقسوم علیه دی.

تعریف : معادله $ax^n+bx^{n-1}+\ldots+px+q=0$ (چې ټول ضریبونه یـې صـحیح اعـداد دي) پـه پـام کې نیسو او فرضوو چې x_0 یې یو له سمو جذرونو څخه دی، یعنې x_0 صحیح عـدد پـه پاسـنۍ معادلـه کې صدق کوي، په دې صورت کې باید ولرو چې:

$$x_0(ax_0^{n-1}+bx_0^{n-2}+\ldots+p)=-q$$

څرنګه چې دواړې خواوې له صحیح عدد سره مساوي دي، پر دې اساس q پر x_0 د تقسیم وړتیا لري، په دې توګه لاندې قوانین ترلاسه کېږي:

I) که معادله سم ځواب ولري، دغه ځواب د q ثابت عدد مقسوم علیه دی.

II) که معادله ناطق جذر ولري، دغه جذر د هغه کسر په توګه دی چې صورت یې د q مقسوم علیه او مخرج یې د a (د تر ټولو لوړې درجې ضریب) مقسوم علیه وي.

15 **مثال)** $3x^3-20x^3+18x^2-7x+6=0$ معادله حل کړئ.

16 **مثال)** د a او n قیمتونـه غوښـتل شـوي پـه دې شرط چـې $f(x)=(a-1)x^m-2an^{n-1}+8$ پولینوم پر $x-2$ د تقسیم وړ وي، په دې صورت کې خارج قسمت محاسبه کړئ.

17 **مثال)** $f(x)$ درېیمه درجه تابع داسې ترلاسه کړئ چې د ضریبونو مجموعه یې 2 وي، پـر $x+1$ د تقسیم وړتیا ولري او پر x^2+1 د تقسیم په پایله کې یې باقیمانده مساوي په $1-x$ شي.

18 **مثال)** ثبوت کړئ که $x^4+px^2+qx+a^2$ پولینوم پر x^2-1 د تقسیم وړتیا ولري، پـر x^2-a^2 هم د تقسیم وړتیا لري.

19 **مثال)** $f(x)$ چې m درجه لري، داسې ترلاسه کړئ چې پر $f'(x)$ د تقسیم وړتیا ولري او ولرو چې: $f(1)=0,\ f(0)=1$

20 **مثال)** ثبوت کړئ چې که $a^p - b^p$ پر P د تقسیم وړتیا ولري، پر p^2 هم د تقسیم وړتیا لري.
(b, a صحیح او مثبت اعداد دي او p لومړنی عدد دی)

21 **مثال)** ثبوت کړئ چې که k صحیح او پر 3 نه تقسیم کېدونکی عدد وي، $(a+b)^{2k} + a^{2k} + b^{2k}$ افاده پر $a^2 + ab + b^2$ د تقسیم وړتیا لري.

3. د $P(x)$ پر $(x-a)$ تقسیم، د خارج قسمت ټاکل

3-1) لومړۍ طریقه (د هورنر جدول)

دغه طریقه د مثال په مرسته توضح کوو:

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ پر $x-1$ تقسیموو او غواړو خارج قسمت او باقیمانده یې ترلاسه کړو.

$p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

1	2	-4	3	-5	$=$	-5
	2	$(2\times1)+(-4)=-2$	$(-2\times1)+3=1$	$(1\times1)+(-5)$		$(1\times1)+(-5)=-4$

په پاسني ردیف کې د مقسوم ضریبونه لیکو، لومړنی ضریب، یعنې 2مستقیم لاندې راولو او هغه له 1 سره یې ضربو، د پاسني عدد سره یې جمع کوو او دغه عمل تکراروو.

په لاندني ردیف کې درې لومړي اعداد یعنې $(2,-2,1)$ د خارج قسمت ضریبونه دي او وروستی عدد یعنې -4 باقیمانده دی، څرنګه چې د مقسوم درجه $n=3$ او د مقسوم علیه درجه $m=1$ ده، د خارج قسمت درجه $n-m=2$ ده، یعنې $q(x)$ یوه دویمه درجه معادله ده.

$q(x) = 2x^2 - 2x + 1$

$R = -4$

22 **مثال** $P(x) = x^4 + 2x^3 + x - 9$) پر $x+2$ تقسیموو، خارج قسمت یې ترلاسه کړئ.

23 **مثال)** $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x + 1$ پر $x-2$ تقسیموو، خارج قسمت او باقیمانده یې ترلاسه کړئ.

24 **مثال)** $x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ پر $x-2$ تقسیموو، خارج قسمت یې ترلاسه کړئ.

3-2) دویمه طریقه (نامعین ضریبونه)

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ پولینوم په پام کې نیسو، د $x-a$ مقسوم علیه چې درجه یو دی، په فرضولو سره، د دغه تقسیم خارج قسمت $n-1$ درجه او په $g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ توګه دی.

غواړو هغه طریقه بیان کړو چې د تقسیم له عمل پرته وکولی شو د b_{n-1} او ...... او b_1 او b_0 نامعین ضریبونه ترلاسه کړو، په پایله کې به په دې وتوانېږو تر څو د تقسیم خارج قسمت وټاکو.

ځرنگه چې د تقسیم له قضیې څخه پایله ترلاسه کېږي، نو باید ولرو:

$$p(x)=(x-a)g(x)+R$$
$$\Rightarrow a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-a)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}\right)+R$$
$$\Rightarrow a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x-ab_0x^{n-1}-ab_1x^{n-2}-\ldots-ab_{n-1})+R$$
$$\Rightarrow a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_n=b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+\ldots+(b_k-ab_{k-1})x^{n-k}+\ldots-ab_{n-1}+R$$

د هم درجه حدونو د ضریبونو له مساوي والي څخه به ولرو چې:

$$\begin{aligned}
&a_0=b_0\\
&a_1=b_1-ab_0 \quad \Rightarrow b_1=a_1+ab_0\\
&\quad\vdots\\
&a_k=b_k-ab_{k-1} \Rightarrow b_k=a_k+ab_{k-1}\\
&\quad\vdots\\
&a_n=R-ab_{n-1} \quad \Rightarrow R=a_n+ab_{n-1}
\end{aligned}$$

25 **مثال)** که $p(x)=3x^2+5x^2+3x+1$ پر $x+1$ تقسیم کړو، خارج قسمت یې ترلاسه کړئ.

26 **مثال)** په $p(x)=ax^4+bx+2$ پولینوم کې د a او b قیمتونه داسې وټاکئ ترڅو که $p(x)$ پر x^2+2 بینوم تقسیم کړو باقیمانده یې $3x-1$ شي.

27 **مثال)** که $p(x)=8x^3+22x^2+17$ افاده پر $2x+4$ تقسیم کړو، خارج قسمت یې ترلاسه کړئ.

28 **مثال)** که $P(x)=x^5-3x^3+2x+1$ افاده پر $x-2$ تقسیم کړو خارج قسمت یې د نامعینو ضریبونو په طریقه ترلاسه کړئ.

29 **مثال)** که $(x-2)^4$ پر x^3+ax^2+bx+c د تقسیم وړتیا ولري، b ترلاسه کړئ.

4. د $p(x)$ پولینوم تقسیم پر ax^n+b

په عمومي توگه پر ax^n+b د $P(x)$ باقیمانده د ټاکلو لپاره، لومړی $P(x)$ د x^n له جنسه منظم کوو:

« د x^n له جنسه د $p(x)$ عبارت تنظیم »

او وروسته $x^n=-\dfrac{b}{a}$ وضع کوو او باقیمانده ترلاسه کوو.

یادونه: د تقسیم باقیمانده قانون بیا هم کولی شو تعمیم کړو.

فرض کړئ غواړو پر $x^n-A(x)$ د $P(x)$ باقیمانده ترلاسه کړو چې په دې کې $A(x)$ هغه الجبري افاده ده چې درجه یې له n څخه وړوکې ده او په دې صورت کې د $P(x)$ د x^n توانونو له جنسه لیکو او وروسته x^n په $A(x)$ اړوو او دغه عمل تر هغه تکرارو ترڅو مطلوبې پایلې ته ورسېږو.

يادونه

کـولی شـو ثبـوت کـړو چـې هـر $x^{km}+x^{kn+1}+x^{kp+2}+\cdots+x^{kl+k-1}$ تـه ورتـه افـاده پـر $x^{k-1}+x^{k-2}+x^{k-3}+\ldots+x+1$ ته ورته افاده د تقسیم وړتیا لري (c طبیعي اعداد m او n او .... او l غیر منفي صحیح اعداد دي)

30 **مثال)** که $p(x)=x^{27}-2x^{6}+3x^{5}-x^{3}+1$ پر $x^{3}+1$ تقسیم کړو باقیمانده یې تر لاسه کړئ.

31 **مثال)** که $p(x)=x^{\circ}+-2x^{5}+x^{3}-x^{2}+x$ پر $x^{2}+1$ او $x^{3}-1$ تقسیم کړو باقیمانده یې تر لاسه کړئ.

32 **مثال)** پر $ax^{n}+b$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده په هغه صورت کې تر لاسه کړئ چې $p(x)=ax^{3n+2}+bx^{2n+1}+c$ وي.

33 **مثال)** که پر $x^{2}+1$ د $p(x)=x^{3}+ax+b$ د تقسیم باقیمانده مساوي په $2x-6$ وي a او b ترلاسه کړئ.

34 **مثال)** پر $x^{3}+1$ د x^{47} د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

35 **مثال)** د m قیمت داسې ترلاسه کړئ چې $p(x)=x^{3}\cos^{3}\alpha-mx\sin 2\alpha+\sin^{3}\alpha$ تل پر $x\cos\alpha-\sin\alpha$ د تقسیم وړ وي.

36 **مثال)** که پر $x^{3}+1$ د $p_1(x)=ax^{6}+bx^{3}+1$ د تقسیم باقیمانده مساوي په 1 وي، پر $x+2$ د $p_2(x)=x^{2}+ax+2b$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

37 **مثال)** که $2x^{3}+ax^{2}+bx+3$ افاده پر $x^{2}+3$ د تقسیم وړ وي a او b ترلاسه کړئ.

38 **مثال)** پر $x^{2}+x+1$ د $p(x)=x^{5}+x+1$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

39 **مثال)** که $p(x)=x^{6}=ax^{4}+bx^{3}+1$ پر $x^{2}-1$ د تقسیم وړ وي $3b-4a$ ترلاسه کړئ.

40 **مثال)** وښیئ چې $p(x)=(x+y+z)^{3}-x^{3}-y^{3}-z^{3}$ افاده پر $x+y$ د تقسیم وړ ده.

41 **مثال)** کـه پـر $x^{3}+7$ د $p(x)=ax^{6}+bx^{3}+1$ باقیمانـده مسـاوي پـه 1 وي پـر $x+2$ د $g(x)=x^{2}+ax+2b$ افادې د تقسیم باقیمانده څو ده؟

42 **مثال)** که $f(x)=x^{6}+x^{3}+1$ پر $x^{2}+1$ تقسیم شي، باقیمانده یې څومره ده؟

43 **مثال)** ثبوت کړئ که m او n او p اعداد طبیعي اعداد وي، $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ افاده د x ټولو حقیقي قیمتونو لپاره پر $g(x)=x^{2}+x+1$ عبارت د تقسیم وړتیا لري.

44 **مثـــال)** m او n او q او r صـــحیح او غیـــر منفـــي اعـــداد دي، ثبـــوت کـــړئ چـــې $x^{5m}+x^{5n+1}+x^{5p+2}+x^{5q+3}+x^{5r+4}$ افـاده د x ټولـو قیمتونـو تـه پـر $x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$ د تقسیم وړتیا لري.

45 **مثال)** وښیئ که $p(x)$ پر $x^{n+1}-1$ د تقسیم وړتیا ولري، پر $g(x)=x^{n}+x^{n-1}+\ldots+x+1$ هم د تقسیم وړ دی.

46 **مثال**) که p او q او r او s او t طبیعي اعداد وي:
ثبوت کړئ چې $A(x)=x^{14p+6}-x^{14q+5}+x^{14r+4}-x^{14r+3}+x^{14s+2}-x^{14s+1}+x^{14t}$ پر $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$ د تقسیم وړ دی.

47 **مثال**) که n او m او k او r او s طبیعي اعداد وي ، ثبوت کړئ چې $p(x)=x^{5n+4}+x^{5m+3}+x^{5k+2}+x^{5r+1}+x^{5s}$ پر $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ افاده د تقسیم وړتیا لري.

48 **مثال**)په کوم شرط $p(x)=1+x^2+x^4+...+x^{2n}$ افاده پر $g(x)=1+x+x^2+...+x^n$ افاده د تقسیم وړتیا لري $(n\neq 1)$ و $(x^2\neq 1)$

49 **مثال**) $f(x)$ پنځمه درجه ده، پر x^2+1 د تقسیم پر مهال یې باقیمانده -1 او پر x^3+1 یې د تقسیم پر مهال باقیمانده 1 ده ، که د $f(x)$ د تر ټولو لوړې درجې ضریب مساوي په یوه وي $f(x)$ ترلاسه کړئ.

5. پر ax^2+bc+c پولینوم د $p(x)$ د تقسیم وړتیا

5-1) پر ax^2+bc+c د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده

پر ax^2+bc+c د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده د x^2 له جنسه مرتبوو، وروسته $x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ وضع کوو، چې په دغه صورت کې ترلاسه شوې افاده د تقسیم باقیمانده ده.

50 **مثال**) پر x^2+x+1 د $p(x)=x^5+x+1$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

51 **مثال**) پر x^2-x د $p(x)=x^8+2x^5+x^3-x^2+x$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

52 **مثال**) که $p(x)=x^4+1$ افاده پر x^2-mx+n د تقسیم وړ وي ، m او n محاسبه کړئ.

53 **مثال**) پر x^2+x+1 د $p(x)=x^{3k}$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

54 **مثال**) پر x^2-x د $p(x)=x^5+x^3+7$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

55 **مثال**) ثبوت کړئ چې $f(x)=x^5-4x^4+4x^3+x^2-4x+4$ پر x^2-x+1 د تقسیم وړ دی.

56 **مثال**) ایا $f(x)=2x^5-4x^4+3x^3-x^2-x+1$ پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړ دی.

57 **مثال**) m او n داسې ترلاسه کړئ چې $4x^4+a^2$ پر x^2+mx+n د تقسیم وړ وي.

58 **مثال**) د m کوم قیمت ته $x^4+ma^2x^2+a^4$ پر x^2-ax+a^2 د تقسیم وړ دی؟

5-2) پر ax^2+bx+c افاده د $P(x)$ د تقسیم د وړتیا شرط، هغه مهال چې دغه عبارت دوه متفاوت جذرونه ولري

که ax^2+bx+c معادله دوه متفاوت ناطق جذرونه ولري، لکه x_1 او x_2 ، د دې شرط چې $p(x)$ په یاد ترینوم د تقسیم وړتیا لري، دا دی چې:

$$\begin{cases} p(x_1)=0 \\ p(x_2)=0 \end{cases}$$

59 **مثال)** a او b داسې ترلاسه کړئ چې $p(x)=2ax^4+(b-2a)x^3-bx^2-4bx-4$ پر x^2-x-2 د تقسيم وړ وي.

60 **مثال)** پر ax^2+bx+c د $p(x)$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کړئ (α او β د دويمه درجه معادلې جذرونه دي).

61 **مثال)** که $p(x)=ax^3-4x^2+bx+6$ پر x^2-x-6 د تقسيم وړ وي a او b ترلاسه کړئ.

62 **مثال)** د a او b کومو قيمتوتو ته $p(x)=ax^4+bx^2+2$ افاده پر x^2-3x+2 د تقسيم وړتيا لري.

63 **مثال)** که $p(x)=x^4+4$ افاده پر x^2-bx+a د تقسيم وړ وي ، a او b محاسبه کړئ.

64 **مثال)** د m او n قيمتونه داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)=x^5+nx^4+(3m+n)x^3-7x^2+2(2m-n)x-8$ افاده پر x^2-3x+2 د تقسيم وړ وي.

65 **مثال)**

1) a او b داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)=a(x-2)^{2n}+b(x-1)^n-1$ افاده پر x^2-3x+2 د تقسيم وړ وي.

2) د a او b لپاره خارج قسمت ترلاسه کړئ.

66 **مثال)** a او b داسې ترلاسه کړئ چې x^4+9 پر x^2+ax+b د تقسيم وړ وي.

3 − 5) پر ax^2+bx+c د $p(x)$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کول، هغه مهال چې دغه افاده مضاعف جذر ولري او يا اصلاً جذر ونلري

که ax^2+ax+c دويمه درجه معادله مضاعف جذر ولري يا اصلاً جذر (حقيقي جذر) ونلري، په دې صورت کې:

لومړی طريقه)

پر ax^2+bx+c د $p(x)$ تقسيم په مستقيمه توګه ترسره کوو او د تقسيم عمومي فورمول ليکو، او د نامعينو ضريبونو په واسطه دواړې خواوې سره يوځای کوو.

دويمه طريقه)

1) په هغه صورت کې چې $\Delta=0$ وي او $p(x)$ پر ax^2+bx+c دتقسيم وړتيا ونلري پر ax^2+bx+c د $p(x)$ د تقسيم باقيمانده د ترلاسه کولو لپاره ، $p(x)$ د x^2 د توانونو له جنسه منظم کوو، وروسته په ترتيب د x^2 پرځای $-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ وضع کوو.

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\Rightarrow x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}\end{cases}$$

2) په هغه صورت کې چې $\Delta<0$ وي ax^2+bx+c دویمه درجه ترینوم دوه مختلط جذرونه لري او پر ax^2+bx+c د $p(x)$ پولینوم د تقسیم باقیمانده د ترلاسه کولو لپاره له لاندې دوو طریقو هم گټه پورته کولی شو.

1−2) د $p(x)$ د x^2 د توانونو به توگه منظم کوو وروسته په ترتیب د x^2 پرځای $-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ افاده وضع کوو.

2−2) له مختلط جذرونو استفاده کوو.

67 **مثال**) b او a داسې ترلاسه کړئ چې $p(x)=x^3+ax^2+bx+2$ پر $(x-2)^2$ د تقسیم وړ وي.

68 **مثال**) m او n حقیقي اعداد داسې ترلاسه کړئ چې $p(x)=2x^4+(2m+n)x^3+6x^2-4mx+n-2$ پولینوم پر x^2+x+1 دویمه درجه ترینوم د تقسیم وړ وي.

69 **مثال**) په کوم شرط $p(x)=x^{2n}+x^n+1$ پر x^2+x+1 د تقسیم وړتیا لري؟

70 **مثال**) د a او b قیمتونه داسې ترلاسه کړئ ترڅو x^4-3x^3+ax+b پر x^2-2x+4 د تقسیم وړ وي.

6. د څو افادو د ضرب پر حاصل د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کول

قضیه (11−6

که پر $(x-a)$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په R_1 او پر $(x-b)$ یې باقیمانده مساوي په R_2 وي، پر $(x-a)(x-b)$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په $R=\left(\frac{R_1-R_2}{a-b}\right)x+\left(\frac{aR_2-bR_1}{a-b}\right)$ ده.

ثبوت

$$\begin{array}{l|l} p(x) & (x-a)\\ \hline \vdots & \\ \hline R_1 & \end{array}\qquad \begin{array}{l|l} p(x) & (x-b)\\ \hline \vdots & \\ \hline R_2 & \end{array}\qquad \begin{array}{l|l} p(x) & (x-a)(x-b)\\ \hline \vdots & q(x)\\ \hline R=mx+n & \end{array}$$

د باقیمانده درجه د مقسوم علیه له درجې یوه درجه ټیټه ده (لومړۍ درجه افاده)

$$p(x)=(x-a)(x-b)q(x)+(mx+n)$$

پر $x-a$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په R_1 ده:

$$x-a=0\Rightarrow x=a$$

$$p(a)=R_1 \Rightarrow (a-a)(a-b)q(a)+ma+n=R_1$$
$$\Rightarrow ma+n=R_1$$

پر $x-b$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په R_2 ده:

$$x-b=0 \Rightarrow x=b$$
$$p(b)=R_2 \Rightarrow (b-a)(b-b)q(b)+mb+n=R_2$$
$$\Rightarrow mb+n=R_2$$

$$\begin{cases} ma+n=R_1 \\ mb+n=R_2 \end{cases} \Bigg\rangle \begin{cases} m=\dfrac{R_1-R_2}{a-b} \\ n=\dfrac{aR_2-bR_1}{a-b} \end{cases}$$

$$R=mx+n \Rightarrow R=\left(\frac{R_1-R_2}{a-b}\right)x+\left(\frac{aR_2-bR_1}{a-b}\right)$$
$$=R_1\frac{x-b}{a-b}+R_2\frac{x-a}{b-a}$$

یادونه 1) که پر $x-a$ او $x-b$ او $x-c$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده په ترتیب مساوي په R_1 او R_2 او R_3 وي، پر $(x-a)(x-b)(x-c)$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي ده په:

$$R=R_1\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+R_2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)}+R_3\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

یادونه 2) که پر $(x-a)$ ، $(x-b)$، $(x-c)$......... د $p(x)$ باقیمانده معلوم وي او وغواړو د ضرب پر حاصل، یعنې ......$(x-a)(x-b)(x-c)$یې د $p(x)$د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړو، د مسئلې د فرضیو په پام کې نیولو سره، پر ......$(x-a)(x-b)(x-c)$ د $p(x)$ د تقسیم عمومي فورمول لیکو، دباقیمانده درجه تشخیص او باقیمانده ترلاسه کوو.

71 **مثال)** که پر $x-1$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په 4 او پر $x+2$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په $5-$ وي، پر $(x-1)(x+2)$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

72 **مثال)** پر $x+1$ او $x-2$ او $x+2$ د $f(x)$ د تقسیم باقیمانده په ترتیب 1 او $3-$ او 2 ده، پر $(x^2-4)(x+1)$ د $f(x)$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

73 **مثال)** که $f(x)-3$ پر $x-1$ او $2x+5$ د تقسیم وړ وي او پر $x-2$ د $f(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په 21 وي، پر $(2x+5)(x-1)(x-2)$ افادې د $f(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په څو ده؟

74 **مثال)** که پر $(2x+5)(x-1)(x-2)$ د $f(x)$ د تقسیم باقیمانده په $4x^2+6x-7$ توګه وي، پر $2x+5$ ، $x-1$ ، $x-2$ د $f(x)$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

75 **مثال)** څلورمه درجه $f(x)$ داسې ترلاسه کړئ چې پر $x+2$ د تقسیم وړ وي، د عددي ضریبونو

مجموعه یې مساوي په 15 وي او پر $x+1$ او $x+3$ او $x-2$ د تقسیم په پایله کې یې باقیمانده په ترتیب مساوي په 5 او -13 او 92 وي.

76 مثال) پوهېږو چې پر $x-\alpha$ او $x-\beta$ د $f(x)=x^3-22x-19$ د تقسیم باقیمانده په ترتیب مساوي په β او α ترلاسه کېږي α ، β ترلاسه کړئ.

$6-2$) 2 قضیه

که پر $x-a$ او $x-b$ او .... د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په R وي، د ضرب پر حاصل یعنې ..... $(x-a)(x-b)$ یې د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په R ده.

ثبوت

پاسنۍ قضیه د دوو افادو لپاره ثبوت کړئ:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & (x-a) \\ \hline \vdots & \\ \hline R & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & (x-b) \\ \hline \vdots & \\ \hline R & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & (x-a)(x-b) \\ \cline{2-2} \vdots & q(x) \\ \hline mx+n=R & \end{array}$$

$$p(x)=(x-a)(x-b)q(x)+(mx+n)$$

پر $x-a$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په R ده:

$$x-a=0 \Rightarrow x=a$$
$$R=p(a) \Rightarrow R=ma+n$$

پر $x-b$ د $p(x)$ باقیمانده مساوي په R ده:

$$x-b=0 \Rightarrow x=b$$
$$R=p(b) \Rightarrow R=mb+n$$
$$\left.\begin{cases} ma+n=R \\ mb+n=R \end{cases}\right\rangle \begin{cases} m=0 \\ n=R \end{cases}$$
$$mx+n=(0)x+R=R$$

77 مثال) هغه درېیمه درجه پولینوم ترلاسه کړئ چې پر $x-1$، $x-2$، $x-3$ یې د تقسیم باقیمانده مساوي په 6 وي او پر $x+1$ د تقسیم وړ وي.

$6-3$) 3 قضیه

که پر $g(x)$ د $f_1(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په $R_1(x)$ او پر $g(x)$ د $f_2(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په $R_2(x)$ وي، پر $g(x)$ د $f_1(x)\times f_2(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي ده پر $g(x)$ د $R_1(x)\times R_2(x)$ د تقسیم له باقیمانده سره.

ثبوت

$$\begin{array}{l|l} f_1(x) & g(x) \\ \cline{2-2} \vdots & q_1(x) \\ \overline{R_1(x)} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} f_2(x) & g(x) \\ \cline{2-2} \vdots & q_2(x) \\ \overline{R_2(x)} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} f_1(x)\cdot f_2(x) & g(x) \\ \cline{2-2} \vdots & \\ \overline{\quad R \quad} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} R_1(x)\cdot R_2(x) & g(x) \\ \cline{2-2} \vdots & \\ \overline{\quad R \quad} & \end{array}$$

$$f_1(x)=g(x).q_1(x)R_1(x)$$
$$f_2(x)=g(x).q_2(x)R_2(x)$$
$$f_1(x).f_2(x)=[g(x).q_1(x)+R_1(x)][g(x).q_2(x)+R_2(x)]$$
$$f_1(x).f_2(x)=g^2(x).q_1(x).q_2(x)+g(x).q_1(x).R_2(x)+g(x)R_1(x)q_2(x)+R_1(x)R_2(x)$$
$$f_1(x).f_2(x)=g(x)[q_1(x).q_2(x).g(x)+q_1(x).R_2(x)+R_1(x).q_2(x)]+R_1(x).R_2(x)$$
$$f_1(x).f_2(x)=g(x).Q(x)+R_1(x).R_2(x)$$

کـه د $R_1(x).R_2(x)$ درجـه د $g(x)$ لـه درجـې لـږ وي، باقيمانـده هماغـه $R_1(x).R_2(x)$ ده او کـه د $R_1(x).R_2(x)$ درجـه د $g(x)$ لـه درجـې سره مسـاوي يـا تـرې ډېـره وي هغـه پـر $g(x)$ تقسـيموو او باقيمانده يې ترلاسه کوو.

78 **مثـال)** کـه پـر x^2+2x+4 د $p(x)$ او $g(x)$ باقيمانــده مسـاوي پــه x او $3x-1$ وي، پــر x^2+2x+4 د $p(x)\times g(x)$ باقيمانده ترلاسه کړئ.

79 **مثال)** که پر x^2+4x+5 د $f_1(x)$ باقيمانـده مساوي پـه x او پر x^2+4x+5 د $f_2(x)$ د تقسيم باقيمانده مساوي په $x+5$ وي، پر x^2+4x+5 د $f_1(x)\times f_2(x)$ دتقسيم باقيمانده ترلاسه کړئ.

80 **مثال)** که پر $2x+7$ د $f_1(x)$ د تقسيم باقيمانده مساوي په 4 او پر $2x+7$ د $f_2(x)$ د تقسيم باقيمانده مساوي په -3 وي، پر $2x+7$ د $f_1(x)\times f_2(x)$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کړئ.

81 **مثال)** وښيئ چې پـر ax^2+bx+c د $A(x)$ او $B(x)$ پولينـوم د تقسـيم باقيمانـده پـه ترتيـب مساوي په $ks+s$ او $mx+n$ وي، پر ax^2+bx+c د $A(x).B(x)$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کولـو لپاره اړينه ده ترڅو پر ax^2+bx+c د $(kx+s)(mx+n)$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کړو.

82 **مثال)** a او b او c داسې ترلاسـه کـړئ چې پر x^2+1 او x^3+1 د $p(x)=ax^4+bx^3+c$ عبارت د باقيمانده د ضرب حاصل مساوي په $2x^2-22x+10$ وي.

83 **مثـال)** کـه پـر x^2-x+1 د $g(x)$ او $f(x)$ باقيمانــده پــه ترتيــب $x-1$ او $x+1$ وي، پــر x^2-x+1 د $f(x).g(x)$ باقيمانده ترلاسه کړئ.

84 **مثال)** په $f(x)=ax^4+bx^3+c$ ترينوم کې a او b او c ضريبونه داسې وټاکئ چې پر x^2+1 د تقسيم د باقيمانده د ضرب حاصل مساوي په $2x^2-12x+10$ وي.

7. د $p(x)$ پر $[a(x)]^n$ د تقسیمورتیا

که $p(x)$ پولینوم پر $[a(x)]^n$ د تقسیم وړ وي، کولی شو ولیکو:

$$p(x)=[a(x)]^n.Q(x) \qquad (1)$$

د (1) رابطې له دواړو خواوو نسبت x ته مشتق نیسو:

$$p'(x)=na'(x)[a(x)]^{n-1}Q(x)+[a(x)]^n.Q'(x)$$
$$=[a(x)]^{n-1}[na'(x).Q(x)+a(x).Q'(x)]$$
$$=[a(x)]^{n-1}.Q_1(x)$$

که $p(x)$ پر $[a(x)]^{n-1}$ د تقسیم وړ وي، مشتق به یې، یعنې $p'(x)$ پر $[a(x)]^{n-1}$ د تقسیم وړتیا ولري، که نسبت x ته د مشتق نیونې عملیه تر $(n-1)$ پورې ترسره کړو، د لاندې مساواتو ردیف به ولرو:

$$p(x)=[a(x)]^n.Q(x)$$
$$p'(x)=[a(x)]^{n-1}.Q_1(x)$$
$$p''(x)=[a(x)]^{n-2}.Q_2(x)$$
$$\vdots$$
$$p^{(n-1)}(x)=a(x).Q_{n-1}(x)$$

یادونه 1)

د دې لپاره چې $p(x)$ پر $[a(x)]^n$ د تقسیم وړ وي اړین او کافي شرط دا دی چې خپله $p(x)$ او تر $(n-1)$ ام پورې یې ټول متوالی مشتقونه پر $a(x)$ د تقسیم وړ وي.

یادونه 2)

د دې لپاره چې $p(x)$ پر $(x-a)^n$ د تقسیم وړ وي، اړین او کافي شرط دا دی چې $p(x)$ او تر $(n-1)$ام پورې یې ټول مشتقونه پر $(x-a)$ د تقسیم وړ وي، یعنې ولرو چې:

$$p(a)=p'(a)=p''(a)=\cdots=p^{(n-1)}(a)=0$$

مثلا په اسانۍ ثبوت کېږي چې که $p(x)$ پر $(x-a)^2$ د تقسیم وړ وي، مشتق یې یعنې $p'(x)$ پر $x-a$ د تقسیم وړتیا لري ، که ولرو:

$$p(x)=(x-a)^2g(x)$$
$$p'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)=(x-a)[2g(x)+(x-a)g'(x)]$$

په دې توګه ددې لپاره چې $p(x)$ پر $(x-a)^2$ د تقسیم وړ وي باید ولرو چې:

$$p(a)=p'(a)=0$$

یادونه 3)

ددې لپاره چې معادله مضاعف جذر ولري اړین او کافي شرط دا دی چې، معادله او له مشتق څخه یې ترلاسه شوې معادله یو ګډ جذر ولري.

85 **مثال)** وښيئ چې $p(x)=x^3+3x^2-4$ پر $(x+2)^2$ د تقسيم وړتيا لري.

86 **مثال)** که $p(x)=x^4+ax^2+bx+c$ پر $(x+1)^3$ د تقسيم وړ وي a ترلاسه کړئ.

87 **مثال)** د a او b او c کومو قيمتونو ته $p(x)=x^4+ax^2+bx+c$ څلور حده پر $(x+1)^3$ د تقسيم وړ دی؟

88 **مثال)** په $p(x)=x^3+px^2+qx+r$ پولينوم کې د p او q او r قيمتونه داسې وټاکئ چې $p(x)$ پر $(x-1)^2$ او $x+2$ د تقسيم وړ وي.

89 **مثال)** ايا $p(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n+1$ تل پر $(x-1)^2$ د تقسيم وړ دی.

90 **مثال)** a داسې ترلاسه کړئ ترڅو $f(x)=x^3-2x^2+x+a=0$ دريمه درجه معادله يو مضاعف جذر ولري، وروسته د $f(x)=0$ جذرونه ترلاسه کړئ.

91 **مثال)** a او b او c او d ضريبونه داسې ترلاسه کړې چې $f(x)=\frac{1}{5}x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ پر $(x-1)^2(x+1)^2$ د تقسيم وړ وي.

92 **مثال)** که $f(x)$ پر $(x-1)^2$ د تقسيم وړ وي او $f(x)-3$ پر $x-2$ د تقسيم وړتيا ولري، پر $f(x)$ د $(x-1)^2(x-2)$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کړئ.

93 **مثال)** $p(x)$ اوومه درجه پولينوم پر $(x-1)^4$ او $(x+1)^4$ د تقسيم په پايله کې په ترتيب -1 او 1 باقيمانده پرې ايښې ، $p(x)$ ترلاسه کړئ.

94 **مثال)** $f(x)$ پولينوم چې $n(n\in N)$ درجه ده داسې ترلاسه کړئ چې:

1) $f(x)$ پر خپل مشتق يعنې $f'(x)$ د تقسيم وړ وي.

2) $f(x)$ پر $x-1$ د تقسيم وړ وي.

3) $f(x), f(o)=1$ وي.

له درې واړو شرطونو د $f(x)$ ترلاسه کولو کې ګټه پورته کړئ.

95 **مثال)** $f(x)$ پنځمه درجه پولينوم داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)+2$ پر $(x-1)^3$ او $f(x)-4$ پر $(x+1)^3$ د تقسيم وړ وي.

96 **مثال)** د a ټول قيمتونه داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)=4x^3-9x^2+6x+a=0$ دريمه درجه معادله دوه مساوي جذرونه يا يو مضاعف جذر ولري او وروسته معادله حل کړئ.

97 **مثال)** ثبوت کړئ چې د $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$ معادلې هر جذر يو ساده جذر دی.

98 **مثال)**

1) a او b داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)=x^n+ax^{n-1}+b$ پر $(x-1)^2$ د تقسيم وړ وي.

2) پر $(x-1)^2$ د $f(x)$ د تقسيم خارج قسمت د b,a ترلاسه شوو قيمتونو ته محاسبه کړئ.

99 **مثـــــال)** د m او n او p او q قیمتونــــــه داســــــې ترلاســــــه کــــړئ چــــې $f(x)=x^{2a}+mx^{a+1}+nx^{a}+px^{a-1}+q$ افاده پر $(x-1)^4$ د تقسیم وړ وي.
(a هغه صحیح عدد دی چې له 3 ستر دی)

100 **مثـــال)** د x قیمـــت داســـې ترلاســـه کـــړئ چـــې $a^{23}+a^{22}+\ldots+a+1$ افـــاده پـــر $a^{x-1}+a^{x-2}+\ldots+a+1$ افاده د تقسیم وړتیا ولري.

101 **مثال)** $f(x)$ څلورمه درجه پولینوم داسې ترلاسه کړئ چې $f(x+1)$ پـر $(x-1)^2$ او $f(x-1)$ پر $(x+1)^2$ د تقسیم وړ وي او $f(1)=1$ وي.

102 **مثال)** ثبوت کړئ چې که $f(x,y)$ نسبت x او y ته متناظر او پر $x-y$ د تقسیم وړ وي پر $(x-y)^2$ هم د تقسیم وړ دی.

8. پر $x\pm a$ د $x^m \pm a^m$ د تقسیم‌وړتیا

8−1) پر $x-a$ د x^m-a^m د تقسیم‌وړتیا

$$p(x)=x^m-a^m$$
$$x-a=0\Rightarrow x=a$$
$$p(a)=R\Rightarrow (a)^m-(a)^m=R$$
$$\Rightarrow R=0$$

1) x^m-a^m تل پر $x-a$ د تقسیم وړ دی.

2) که پر $x-a$ د $p(x)$ د تقسیم خارج قسمت د هورنر جدول له مخې وټاکو، نـو لانـدې مطابقـت ترلاسه کوو:

$$x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+x^{m-2}.a+\ldots+a^{m-1})$$

مثلا $21^{10}-7^{10}$ پر $21-7=14$ د تقسیم وړ دی.

3) x^m-a^m هغه مهال پر x^n-a^n د تقسیم وړ دی چې $m=kn$ وي، یعنې m د n مضرب(ولو جفت که تاق) وي.

مثلاً $x^{12}-a^{12}$ پر x^3-a^3 د تقسیم وړ دی، ځکه $12=4\times 3$

لومړۍ طریقه

$$p(x)=x^m-a^m=x^{kn}-a^{kn}=(x^n)^k-(a^n)^k$$
$$x^n-a^n=0\Rightarrow x^n-a^n$$
$$p(a^n)\ =R\Rightarrow (a^n)^k-(a^n)^k=R$$
$$\Rightarrow R=0$$

(k جفت یا تاق وي)

دويمه طريقه

که m پر n تقسيم کړو $m=kn+r$

$$p(x)=x^m-a^m=x^{kn+r}-a^{kn+r}$$
$$=\left(x^n\right)^k.x^r-\left(a^n\right)^k.a^r$$
$$x^n-a^n=0\Rightarrow x^n=a^n$$
$$p\left(a^n\right)=a^{nk}.x^r-a^{nk}.a^r$$
$$=a^{nk}\left(x^r-a^r\right)$$

ددې لپاره چې باقيمانده صفر شي بايد $x^r-a^r=0$ شي خو $x\neq a$ دی نو په پايله کې $r=0$

$$if\quad r=0\Rightarrow m=kn$$

103 **مثال)** وښيئ چې $5^{2n}-1$ عدد پر 24 د تقسيم وړ دی.

104 **مثال)** د هر $n\in N$ لپاره ثبوت کړئ چې $N=5^{2n-1}\times 2^{n+1}+3^{n+1}\times 2^{2n-1}$ عدد پر 19 د تقسيم وړتيا لري.

105 **مثال)** پوهېږو چې x او y او z طبيعي اعداد دي، $x^y-2^z=1$ حل کړئ.

2 − 8) پر $x+a$ د x^m-a^m د تقسيم وړتيا

$$p(x)=x^m-a^m$$
$$x+a=0\Rightarrow x=-a$$
$$p(-a)=R\Rightarrow R=(-a)^m-a^m\Rightarrow R=\begin{cases}0 & :m=2k\\ -2k: & m=2k+1\end{cases}$$

1) x^m-a^m هغه مهال پر $x+a$ د تقسيم وړ دی $(R=0)$ چې m جفت عدد وي.

2) که خارج قسمت د هورنر طريقې پر اساس ترلاسه کړو ، لاندې مطابقت ترلاسه کېږي:

$$x^m-a^m=(x+a)\left(x^{m-1}-x^{m-2}.a+x^{m-3}.a^2-....-a^{m-1}\right)$$

مثلا $21^{10}-7^{10}$ پر $21+7=28$ د تقسيم وړتيا لري.

3) x^m-a^m هغه مهال پر x^n+a^n د تقسيم وړ دی چې $m=2kn$ وي، يعنې m د n جفت مضرب دی.

ثبوت

$$P(x)=x^m-a^m$$
$$=(x)^{2kn}-a^{2kn}$$
$$=\left(x^n\right)^{2k}-\left(a^n\right)^{2k}$$
$$x^n+a^n=0\Rightarrow x^n=-a^n$$
$$R=p\left(-a^n\right)\Rightarrow R=\left(-a^n\right)^{2k}-\left(a^n\right)^{2k}$$
$$\Rightarrow R=0$$

مثلاً $x^{12}-a^{12}$ پر x^3-a^3 د تقسیم وړ دی، ځکه $12=\underbrace{4}_{2k}\times 3$

په ټولیزه توګه $\frac{m}{n}$ جفت دی، x^m-a^m پر $x+a$ د تقسیم وړ دی، یو بل مثال راوړو، $x^{48}-1$ پر x^6+1 او x^4+1 او x^2+1 د تقسیم وړ دي.

106 **مثال)** ایا x^4-16 افاده پر $x+2$ او $x-2$ د تقسیم وړتیا لري.

107 **مثال)** ثبوت کړئ چې $7^{2^n}-1$ پر 29 د تقسیم وړ دی. $(n\in N, n>1)$

108 **مثال)** په کوم شرط $(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$ افاده پر $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ د تقسیم وړ ده؟

3 − 8) x^m+a^m پر $x+a$ د تقسیم وړتیا

$$p(x)=x^m+a^m$$
$$x+a=0\Rightarrow x=-a$$
$$p(-a)=R\Rightarrow(-a)^m+(a)^m=R\Rightarrow R=\begin{cases}2a^m & : m=2k\\ 0 & : m=2k+1\end{cases}$$

1) x^m+a^m هغه مهال پر $x+a$ د تقسیم وړ دی $(R=0)$ چې m تاق عدد وي.

2) که خارج قسمت د هورنر طریقې پر اساس وټاکو، لاندې مطابقت ترلاسه کیږي:

$$x^m+a^m=(x+a)(x^{m-1}-x^{m-2}.a+\ldots+a^{m-1})$$

3) x^m+a^m هغه مهال پر x^n+a^n د تقسیم وړ دی چې $m=(2k+1)n$ وي، یعنې m د n تاق مضرب وي.

ثبوت

$$p(x)=x^m+a^m$$
$$=x^{(2k+1)n}+a^{(2k+1)n}$$
$$=(x^n)^{2k+1}+(a^n)^{2k+1}$$
$$x^n+a^n=0\Rightarrow x^n=-a^n$$
$$R=p(-a^n)\Rightarrow R=(-a^n)^{2k+1}+(a^n)^{2k+1}$$
$$\Rightarrow R=(-a)^{(2k+1)n}+(a)^{(2k+1)n}$$
$$\Rightarrow R=0$$

یعنې m باید تاق وي او د $m=(2k+1)n$ ټاکل سم دي.

مثلاً $x^{12}+a^{12}$ پر x^4+y^4 د تقسیم وړ دی، ځکه $12=\underbrace{3}_{2k+1}\times 4$

په ټولیزه توګه که $\frac{m}{n}$ تاق وي، په دې صورت کې x^m+a^m پر x^n+a^n د تقسیم وړ دی د ښه

پوهاوي لپاره يو بل مثال راوړو $x^{48}+1$ پر $x^{16}+1$ د تقسيم وړ دی.

109 **مثال)** وښيئ چې $3^{4n+2}+1$ عدد پر 10 د تقسيم وړتيا لري.

110 **مثال)** آيا $x^{15}+y^{45}$ افاده پر $x+y^{3}$ د تقسيم وړتيا لري.

111 **مثال)** ثبوت کړئ چې $69^{69}+19^{19}$ عدد پر 44 د تقسيم وړتيا لري.

8 − 4) پر $x-a$ د $x^{m}+a^{m}$ دتقسيم وړتيا

$$p(x)=x^{m}+a^{m}$$
$$x-a=0\Rightarrow x=a$$
$$p(a)=R\Rightarrow (a)^{m}+(a)^{m}=R\Rightarrow R=\begin{cases}2a^{m} & : m=2k\\ 2a^{m} & : m=2k+1\end{cases}$$

1) $x^{m}+a^{m}$ هېڅکله پر $x-a$ د تقسيم وړ نه دی ځکه د m هېڅ قيمت ته $(R=0)$ نه کېږي.

2) خارج قسمت نشو کولی د هورنر طريقې په ذريعه ترلاسه کړو.

3) $x^{m}+a^{m}$ هېڅکله پر $x^{n}-a^{n}$ د تقسيم وړ نه دی؟

112 **مثال)** ايا $x^{7}+y^{14}$ افاده پر $x-y^{2}$ د تقسيم وړتيا لري؟

9. پر $q(x)=x^{n}+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$ د $p(x)$ دتقسيم وړتيا

د مطابقت په پام کې نيولو سره:

$$x^{n+1}-1=(x-1)(x^{n}+x^{n-1}+\cdots+1)=(x-1)q(x)$$

که $p(x)$ پر $x^{n+1}-1$ د تقسيم وړ وي، په هغه صورت کې $p(x)$ پر $q(x)$ هم د تقسيم وړتيا لري، البته د دې حالت معکوس په ټوليزه توګه سم نه دی.

مثلاً که کومه افاده پر $x^{3}+1$ دتقسيم وړ وي، په دې صورت کې پر $x^{2}-x+1$ هم د تقسيم وړتيا لري.

113 **مثال)** که n او m او k او r او s طبيعي اعداد وي، ثبوت کړئ چې $f(x)=x^{5n+4}+x^{5m+3}+x^{5k+2}+x^{5r+1}+x^{5s}$ افاده پر $g(x)=x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$ افاده د تقسيم وړ ده.

114 **مثال)** په کوم شرط $f(x)=1+x^{2}+x^{4}+\ldots+x^{2n}$ افاده پر $g(x)=1+x+x^{2}+\ldots+x^{n}$ افاده د تقسيم وړ ده $n\neq 1$.

115 **مثال)** په کوم شرط $p(x)=x^{2m}+x^{m}+1$ پر $x^{2}+x+1$ د تقسيم وړ دی.

116 **مثال)** که پر $4x-9$ د $f(x)$ د تقسيم باقيمانده مساوي په 5 وي، پر $2x+3$ د $f(x^{2})$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کړئ.

117 **مثال)** که پر $x^{2}-4$ د $f(x)$ د تقسيم باقيمانده مساوي په $3x+2$ وي، پر $x-1$ د $f(x+1)$ د تقسيم باقيمانده ترلاسه کړئ.

118 **مثال)** که پر x^2-1 د $f(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په $5x$ وي، پر x^2+2 د $f(x^2+1)$ د تقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

119 **مثال)** کـه پـر $x-1$ د $f(x)$ د تقسـیم باقیمانـده مسـاوي پـه 5 وي، پر $x+2$ د $f(x^2-3)$ دتقسیم باقیمانده ترلاسه کړئ.

120 **مثال)** که چېرې پر x^2-1 د $f(x)$ د تقسـیم باقیمانـده مسـاوي پـه 2 وي، پـر x^4+x^2+1 د $f(x^3)$ باقیمانده مساوي په څو ده؟

121 **مثال)** $f(x)$ دریمه درجه پولینوم داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)-2$ پر $(x+2)^2$ او $f(x)+2$ پر $(x-2)^2$ د تقسیم وړتیا ولري.

122 **مثال)** $f(x)$ څلورمه درجه پولینوم دی او پوهېږو چې $f(x+1)$ پـر $(x+2)^2$ او $f(x-2)$ پـر $(x-4)^2$ د تقسیم وړتیا لري.

که $f(3)=32$ وي، $f(x)$ پولینوم ترلاسه کړئ.

123 **مثال)** $f(x)$ پنځمه درجه پولینوم داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)+3$ پر $(x-1)^3$ او $f(x)-3$ پر $(x+1)^3$ د تقسیم وړتیا ولري.

124 **مثال)** پـوهېږو چـې $f(x)-1$ پـر $(x+1)^4$ او $f(x)+1$ پـر $(x-1)^4$ د تقسـیم وړتیـا لـري، کـه $f(x)$ اوومه درجه وي نو ترلاسه یې کړئ.

125 **مثال)** $f(x)$ پنځمه درجه پولینوم داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)+2$ پـر $(x-1)^3$ او $f(x)-4$ پر $(x+1)^3$ د تقسیم وړتیا ولري.

126 **مثال)** ثبوت کړئ چې $x^{3a}+x^{3b+1}+x^{3c+2}$ افاده د a او b او c ټولو قیمتونو ته پر x^2+x+1 د تقسیم وړتیا لري.

10. د ریاضي استقرا طریقه

د تقسیم د وړتیا ډېری مسئلې، په ځانګړي توګه که بحث د تقسیم پر یوه ثابت عـدد وي، کـولی شـو د ریاضي د استقرا په طریقه یې حل کړو.

127 **مثال)** ثبوت کړئ چـې $A_n=n^4+6n^3+11n^2+6n$,$(n\in N)$ عـدد د هـر n لپـاره پـر 14 د تقسیم وړتیا لري.

128 **مثـال)**د اسـتقرا طریقـې پـه مرسـته ثبـوت کـړئ چـې $p(x)=(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ پولینـوم پـر x^2+x+1 دتقسیم وړ ده. $(n\in N)$

11. پر $g(x)\times h(x)$ د $p(x)$ دتقسيم وړتيا په داسې توګه چې $g(x).h(x)$ نسبت يوه بل ته لومړي وي

که b,a اعداد نسبت يوه بل ته لومړي وي (يعنې ګډ مقسوم عليه ونلري) په دې صورت کې که A عدد پر دوو a او b اعدادو د تقسيم وړ وي، د ضرب پر اړونده حاصل يې، يعنې ab هم د تقسيم وړتيا لري.

مثلاً:

12 عدد هم پر 2 او هم پر 3 د تقسيم وړ دی (2 او 3 نسبت يوه بل ته لومړني دي) پر دې اساس 12 يې د ضرب پر حاصل يعنې 6 هم د تقسيم وړتيا لري.

تعريف –دوې الجبري افادې نسبت يوې او بلې ته لومړنۍ بلل کېږي، کله چې ګډ مقسوم عليه يې د الجبري افادې په توګه (نه د يوه عدد په توګه) ونلري.

مثلاً $2(x+1)$, $4(x-2)$ افادې نسبت يوې بلې ته لومړنۍ دي که څه هم دواړې يې پر 2 عدد د تقسيم وړتيا ولري، په داسې حال کې چې دوه x^2-1 او x^3-1 افادې نسبت يوې بلې ته لومړني نه دي ځکه دواړې پر $(x-1)$ د تقسيم وړتيا لري.

د اعدادو اړوند د تقسيم د قابليت قانون د الجبري افادو په هکله هم سم دي:

که $h(x)$ او $g(x)$ نسبت يوه بل ته لومړني وي، په دې صورت کې $p(x)$ هم پر $h(x)$ او هم پر $g(x)$ د تقسيم وړتيا لري، د ضرب پر حاصل يې، يعنې $h(x)\times g(x)$ هم د تقسيم وړ دي.

129 **مثال)** ثبوت کړئ چې $f(x)=x^5+x^3-x^2-1$ پر x^3-x^2+x-1 د تقسيم وړتيا لري.

130 **مثال)** a او b او c او d ضريبونه داسې ترلاسه کړئ چې $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ پر $(x-1)(x^2+1)$ د تقسيم وړ وي .

131 **مثال)** که $f(x)=x^2+2x-4$ پر $(x-\alpha)(x-\beta)$ د تقسيم وړ وي، د $\dfrac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha^2-\beta^2}$ افادې قيمت ترلاسه کړئ.

132 **مثال)** که $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ افاده پر $(x+1)^4$ د تقسيم وړتيا ولري a ترلاسه کړئ.

133 **مثال)** د دوو متوالي تاق اعدادو د ضرب حاصل 323 دی، د دغو دوو اعدادو مجموعه ترلاسه کړئ.

134 **مثال)** د دريو متوالي جفت اعدادو مجموعه تل په کوم عدد د تقسيم وړتيا لري؟

135 **مثال)** د دريو متوالي اعدادو د ضرب حاصل تل په کوم عدد د تقسيم وړتيا لري؟

136 **مثال)** که $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ وي د $A=\dfrac{x^{100}+x^{-100}}{2x^{20}-x^{-5}}$ حاصل ترلاسه کړئ.

12. د موهومي جذرونو کارونه

د تقسیم د وړتیا اړوند بحث کې، کولی شو د مقسوم علیه موهومي جذر څخه (د حقیقي جذرونو په شان) کار واخلو، په دې اړه اړینه ده چې د موهومي اعدادو اړوند ځینې تړونونه، ټکي او قاعدې وپېژنو.

$b\sqrt{-1}$ ته ورته اعدادو ته خالص موهومي اعداد وايي او $a+b\sqrt{-1}$ ته ورته اعدادو ته مختلط وايي.

په الجبر کې معمولاً $\sqrt{-1}$ په i ښيي $(imainaire)$.

لاندې رابطې د موهومي اعدادو اړوند عملیو کې کارول کیږي.

$$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, \ldots$$

او یا په ټولیزه توگه:

$$i^{4k}=1\ ,\ i^{4k+1}=i\ ,\ i^{4k+2}=-1\ ,\ i^{4k+3}=-i$$

د دوو مزدوج مختلط اعدادو د ضرب حاصل، حقیقي عدد دی.

$$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi)&=a^2-b^2i^2\\&=a^2-b^2(-1)\\&=a^2+b^2\end{aligned}$$

$$|a+bi|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

II) واحد موهومي مکعبونه

لکه څرنگه چې 1 دوه حقیقي ± 1 جذرونه لري، ثبوتوو چې $x^n=1$ معادله n حقیقي یا موهومي جذرونه لري، دلته موهومي مکعبونه ترلاسه کیږي.

$$if\ \ n=3\xrightarrow{x^n=3}x^3=1\Rightarrow(x-1)(x^2+x+1)=0\Rightarrow x_1=1, x_2\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

واحد موهومي مکعبونه جالبې ځانگړنې لري، په دې معنی چې د هر یوه مجذور یې له بل سره مساوي دی.

$$x_2^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-3-2i\sqrt{3}}{-4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=x_3$$

$$x_3^2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-3+2i\sqrt{3}}{-4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=x_2$$

په همدې توگه هغه معمولاً په i او j^2 ښیوو، دغه جذرونه هم پر $x^3=1$ معادله کې او هم پر $x^3+x+1=0$ معادله کې صدق کوي، یعنې لرو چې:

$$j^3=1; j^2+j+1=0$$

او یا په ټولیزه توگه $j^{3k}=1; j^{3k+2}+j^{3k+1}+1=0$

III) ثبوتوو که یوه حقیقي ضریب لرونکې معادله، موهومي جذرونه ولري، دغه جذرونه دوه پر دوه د یوه بل مزدوج دي، یعنې که $a+bi$ د یوې حقیقي ضریب لرونکې معادلې جذر وي، $a-bi$ به

يې هم جذر دی، په بل عبارت کـه د $x=a+bi$ لپـاره $f(x)$ حقيقـي ضريـب لرونکـې پولينـوم مساوي په صفر شي، د $x=a-bi$ لپاره هم مساوي په صفر کيږي.

137 **مثال**) د n قيمت غوښتل شوی، په دې شرط چې $(1+i)^n=(1-i)^n$ وي.

138 **مثـال**) د تقسـيم لـه عمليـې پرتـه ثبـوت کـړئ چـې $f(x)=2x^4+5x^2+3x+5$ پـر $2x^2-2x+5$ د تقسيم وړتيا لري.

139 **مثال**) ثبـوت کـړئ چې $f(x)=(x+1)^n-x^n-1$ افـاده پـر $x(x+1)(x^2+x+1)$ د تقسـيم وړتيا لري .

(n هغه تاق عدد دی چې پر 3 د تقسيم وړتيا نلري)

140 **مثال**) $f(x,y)=(x+y)^n-x^n-y^n$ افاده فرضوو.

لـومړی) کـه n تـاق عـدد وي او پـر 3 د تقسـيم وړتيـا ونلـري، ثبـوت کـړئ چـې $f(x,y)$ پـر $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ افادې د تقسيم وړتيا لري.

دويـم) کـه پـر 6 د n دتقسـيم باقيمانـده مسـاوي پـه يـو وي، ثبـوت کـړئ چـې $f(x,y)$ پـر $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$ افادې د تقسيم وړ دی.

درېيم) د مسئلې د حل په مرسته، لاندې افادې تجزيه کړئ.

141 **مثـال**) ثبـوت کـړئ چـې $f(x)=x^{n+1}\cos(n-1)\alpha-x^n\cos n\alpha-x\cos\alpha+1$ افـاده پـر $x^2-2x\cos\alpha+1$ افاده د تقسيم وړتيا لري.

142 **مثال**) $f(x,y,z)=(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n$ افاده فرضوو، ثبوت کړئ چې:

لومړی) $f(x,y,z)$ په $n=6k-1$ حالت کې پر $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$ د تقسيم وړ دی.

دويم) $f(x,y,z)$ په $n=6k+1$ حالت کې پر $(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)^2$ د تقسيم وړ دی.

درېيم) لاندې دوې افادې تجزيه کړئ.

1) $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

2) $(x-y)^7+(y-z)^7+(z-x)^7$

143 **مثال**) ثبوت کړئ چې $x^{n+1}\sin(n-1)\varphi-x^n\sin n\varphi+\sin n\varphi$ افـاده پـر $x^2-2x\cos\varphi+1$ د تقسيم وړتيا لري.

ځوابونه

1 ځواب)

$$\left.\begin{cases} m-1=4 \\ n-m=7 \end{cases}\right\rangle \begin{cases} m=5 \\ n=12 \end{cases}$$

$m-1=4$: د باقيمانده درجه

$n-m=7$: د خارج قسمت درجه

$n=12$: د مقسوم درجه

2 ځواب)

$$p(x)=x^4+ax^3+3x^2+4x+1$$

$p(x)$ پر $x+a$ د تقسيم وړتيا لري:

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a$$
$$R=p(-a)=0$$
$$p(-a)=(-a)^4+a(-a)^3+3(-a)^2+4(-a)+1=0 \Rightarrow a^4-a^4+3a^2-4a+1=0$$
$$\Rightarrow 3a^2-4a+1=0$$
$$\Rightarrow a=1, a=\frac{1}{3}$$

3 ځواب)

$$p(x)=x^5+kx^3+sx^2+3$$

$p(x)$ پر $x-1$ د تقسيم وړتيا لري:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$p(1)=R=0 \Rightarrow p(1)=(1)^5+k(1)^3+s(1)^2+3=0$$
$$\Rightarrow k+s=-4 \quad \cdots(\mathrm{I})$$

پر $x+1$ د $p(x)$ باقيمانده مساوي په -4 ده:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$
$$p(-1)=R => (-1)=-4$$
$$\Rightarrow (-1)^5+k(-1)^3+s(-1)^2+3=-4$$
$$\Rightarrow s-k=-6 \quad \cdots(\mathrm{II})$$
$$(\mathrm{I}),(\Pi) \Rightarrow \left.\begin{cases} k+s=-4 \\ s-k=-6 \end{cases}\right\rangle \begin{cases} s=-5 \\ k=1 \end{cases}$$

4 ځواب)

$$p(x)=x^7-3x^5+x^2-1$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$
$$p(-1)=R \Rightarrow (-1)^7-3(-1)^5+(-1)^2-1=R$$

$$\Rightarrow R = 2$$

5 ځواب)

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

پر $x-a$ د $p(x)$ باقیمانده مساوي په 26 ده:

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$
$$R = p(a) \Rightarrow 26 = (a)^3 + 3(a)^2 + 3(a)$$
$$\Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a = 26$$
$$\Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 26 + 1$$
$$\Rightarrow (a+1)^3 = 27$$
$$\Rightarrow (a+1)^3 = 3^3$$
$$\Rightarrow a + 1 = 3$$
$$\Rightarrow a = 2$$

6 ځواب)

$$p(x) = 4x^3 + mx^2 - 3x + 6$$

$p(x)$ پر $x-2$ د تقسیم وړتیا لري:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$p(2) = R = 0 \Rightarrow 4(2)^3 + m(2)^2 - 3(2) + 6 = 0$$
$$\Rightarrow 32 + 4m - 6 + 6 = 0$$
$$\Rightarrow 32 + 4m = 0$$
$$\Rightarrow m = -8$$

7 ځواب)

$p(x)$ پر $x-1$ د تقسیم وړتیا لري:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$p(1) = 0 \Rightarrow (1)^4 + a(1)^3 + b(1)^2 + 2(1) + c = 0$$
$$\Rightarrow a + b + c = -3 \qquad (\mathrm{I})$$

پر $x-2$ د $p(x)$ باقیمانده مساوي په -3 ده:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$p(2) = -3 \Rightarrow (2)^4 + a(2)^3 + b(2)^2 + 2(2) + c = -3$$
$$\Rightarrow 8a + 4b + c = -23 \qquad (\mathrm{II})$$

پر $x+1$ د $p(x)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په 2 ده:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$
$$p(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^4 + a(-1)^3 + b(-1)^2 + 2(-1) + c = 2$$
$$\Rightarrow -a + b + c = 3 \qquad (\mathrm{III})$$

$$\begin{cases} a+b+c=-3 \\ -a+b+c=3 \\ 8a+4b+c=-23 \end{cases}$$

له پاسنیو معادلو څخه a او b او c د محاسبې وړ دي، د دغه سیستم حل زده کوونکو ته پرېږدو.

8 ځواب)

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f(1)=-7 \end{cases} \rangle \begin{cases} 8+4a+2b-2=0 \\ 1+a+b+-2=-7 \end{cases} \rangle \begin{cases} 4a+2b=-6 \\ a+b=-6 \end{cases} \rangle a=3, b=-9$$

9 ځواب)

$$p(x)=(x-a)(x-b)+k \Rightarrow p(x)=x^2-(a+b)x+ab+k$$
$$x-a-b=0 \Rightarrow x=a+b$$
$$p(a+b)=0 \Rightarrow (a+b)^2-(a+b)(a+b)+ab+k=0$$
$$\Rightarrow ab+k=0$$
$$\Rightarrow k=-ab$$

10 ځواب)

$$p(x)=\left(x^3-3x+2\right)g(x)+\left(x^2+4x+4\right)$$
$$p(-2)=\left[(-2)^3-3(-2)+2\right]g(-2)\left[(-2)^2+4(-2)+4\right] \Rightarrow p(-2)=0$$

11 ځواب)

$$p(x)=\left(mx^{m+1}-mx^m\right)-\left(x^m-1\right)$$
$$p(x)=mx^m(x-1)-\left[(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+....+1\right)\right]$$
$$p(x)=(x-1)-\left[mx^m-\left(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+....+1\right)\right]$$
$$p(x)=(x-1)-\left[\left(x^m-x^{m-1}\right)+\left(x^m-x^{m-2}\right)+\left(x^m-x^{m-3}\right)+...+x^m-1\right]$$
$$p(x)=(x-1)\left[x^{m-1}(x-1)+x^{m-2}\left(x^2-1\right)+x^{m-3}\left(x^3-1\right)+...+\left(x^m-1\right)\right]$$
$$p(x)=(x-1)\left[x^{m-1}(x-1)+x^{m-2}(x-1)(x+1)+x^{m-3}(x-1)\left(x^2+x+1\right)+...+(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1\right)\right]$$
$$p(x)=(x-1)(x-1)\left[x^{m-1}+x^{m-2}(x+1+x^{m-3}\left(x^2+x+1\right)+...+\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1\right)\right]$$
$$p(x)=(x-1)^2\left[x^{m-1}+\left(x^{m-1}+x^{m-2}\right)+\left(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}\right)+...+\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1\right)\right]$$
$$p(x)=(x-1)^2.\underbrace{\left[mx^{m-1}+(m-1)x^{m-2}+(m-2)x^{m-3}+...+1\right]}_{q(x)}$$

$q(x)=mx^{m-1}+(m-1)x^{m-2}+(m-2)x^{m-3}+...+1$ خارج قسمت $p(x)$ بر $x-a$.

12 ځواب)

$$\left.\begin{cases} 4x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow p\left(\dfrac{1}{4}\right)=R \\ x-\dfrac{1}{4}=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow p\left(\dfrac{1}{4}\right)=? \end{cases}\right\rangle p\left(\dfrac{1}{4}\right)=R$$

13 ځواب)

$$\begin{aligned} p(x)=(x-1)g(x)+2 \Rightarrow p(x^3) &= (x^3-1)g(x^3)+2 \\ \Rightarrow p(x^3) &= (x-1)(x^2+x+1)g'(x^3)+\grave{2} \\ \Rightarrow R &= 2 \end{aligned}$$

14 ځواب)

$$\begin{aligned} p(x)=(x^2+1)g(x)+4 \Rightarrow p(x^3) &= (x^6+1)g(x^3)+4 \\ \Rightarrow p(x^3) &= \left[(x^2+1)(x^4-x^2+1)\right]g(x^3)+4 \\ \Rightarrow p(x^3) &= (x^4-x^2+1)\left[(x^2+1)g(x^3)\right]+4 \\ \Rightarrow R &= 4 \end{aligned}$$

15 ځواب)

که دغه معادله سم جذرونه ولري، دغه جذرونه، د 6 عدد مقسوم عليه ګان دي، د 6 عدد مقسوم عليه ګان مساوي دي په:

$$\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$$

مستقيمه ازموينه ښيي چې، که د معادلې د کيڼ لوري پنځمه درجه پولينومونه $p(x)$ ونوموو، نو لرو چې:

$$p(1)=0,\ p(2)=0,\ p(-3)=0$$

پر دې اساس $p(x)$ پر $x+3, x-2, x-1$ او په پايله کې د ضرب پر اړوند حاصل يې د تقسيم وړتيا لري او معادله په لاندې توګه شکل غوره کوي:

$$(x-1)(x-2)(x+3)(3x^2+1)=0$$

چې حقيقي جذرونه يې هماغه 1 او 2 او -3 اعداد دي.

16 ځواب)

$f(x)$ پر $x-2$ د تقسيم وړ دی:

$$\begin{aligned} &x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ &f(2)=0 \Rightarrow (a-1)2^n-2a\times2^{n-1}+8=0 \\ &\qquad \Rightarrow (a-1)2^n-a\times2^n+8=0 \\ &\qquad \Rightarrow -2^n+8=0 \\ &\qquad \Rightarrow 2^n=8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n=3$$

$$if\ \ n=3 \Rightarrow f(x)=(a-1)x^3-2ax^2+8$$
$$\Rightarrow f(x)=ax^3-x^3-2ax^2+8$$
$$\Rightarrow f(x)=(ax^3-2ax^2)-(x^3-8)$$
$$\Rightarrow f(x)=ax^2(x-2)-(x-2)(x^2+2x+4)$$
$$\Rightarrow f(x)=(x-2)(ax^2-x^2-2x-4)$$
$$\Rightarrow f(x)=(x-2)\left[(a-1)x^2-2x-4\right]$$
$$\Rightarrow f(x)=(x-2)\underbrace{\left[(a-1)x^2-2x-4\right]}_{Q(x)}$$

یعنې پر $(x-2)$ د $f(x)$ خارج قسمت په لاندې توګه دی:

$$Q(x)=(a-1)x^2-2x-4$$

17 **ځواب)**

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

1) $a+b+c+d=2$

2) $f(-1)=-a+b-c+d=0$

پر x^2+1 د $f(x)$ باقیمانده مساوي په $1-x$ ده:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$$
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=ax(x^2)+b(x^2)+cx+d$$
$$f(-1)=R \Rightarrow ax(-1)+b(-1)+cx+d=1-x$$
$$=-ax-b+cx+d=1-x$$
$$=x(-a+c)+(d-b)=-x+1 \Rightarrow -a+c=-1, d-b=1$$

$$\left.\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=0 \\ d-b=1 \\ a-c=1 \end{cases}\right\rangle a=1, b=c=0, d=1$$

$$f(x)=x^3+1$$

18 **ځواب)**

که $f(x)=x^4+px^2+qx+a^2$ پولینوم پر x^2-1 د تقسیم وړ وي ، باید باقیمانده یې له x^2-1 سره مساوي په صفر شي:

$$f(x)=(x^2)^2+p(x^2)+qx+a^2$$
$$f(1)=0 \Rightarrow 1+p+qx+a^2=0$$

$$\Rightarrow qx + (1 + p + a^2) = 0$$
$$\Rightarrow q = 0, p = -(a^2 + 1)$$

$$f(x) = x^4 - (a^2 + 1)x^2 + a^2$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 - a^2)$$

يعنې $f(x)$ پر $x^2 - a^2$ هم د تقسيم وړ دی.

19 **ځواب**)

$f(x)$ له m درجې څخه په لاندې توګه يې په پام کې نيسو:

$$f(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)$$

(په کلي حالت کې m ، $\lambda,\ldots,\gamma,\beta,\alpha$ جذرونه کېدلی شي حقيقي يا موهومي وي)

د دغه m درجه لرونکې تابع مشتق $m-1$ درجـه دی او د دې لپـاره چـې $f(x)$ پـر $f'(x)$ د تقسـيم وړتيـا ولـري بايـد $f(x)$ او $f'(x)$ ، $m-1$ تـرمنځ ګـډ جـذر موجـود وي، دغـه $m-1$ ګـډ جذرونـه $\lambda,\ldots,\gamma,\beta$ نيسو او فرضوو چې:

$$(x-\beta)(x-\gamma)..(x-\lambda) = \varphi(x) \Rightarrow f(x) = A(x-\alpha)\varphi(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = A[\varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)]$$

بايد $f'(x)$ پر $\varphi(x)$ د تقسيم وړتيا ولری، د قوس دننه دوو حـدونو څخـه $\varphi'(x)$ پـر $\varphi(x)$ د تقسـيم وړتيا لري، نو بايد $(x-\alpha)\alpha'(x)$ هم پـر $\varphi(x)$ د تقسـيم وړتيـا و لـري، د $\varphi'(x)$ درجـه $m-2$ او د $\varphi(x)$ درجه $m-1$ ده او بايد و لرو چې:

$$(x-\alpha)\varphi'(x) = \lambda\varphi(x)$$

يعنی بايد $\varphi(x)$ پر $x-\alpha$ د تقسيم وړ وي، دا هغه مهال شونې ده چې α يو لـه $\varphi(x)$ جـذرونو سره مساوي وي او مثلاً $\alpha = \beta$ ، په دې صورت کې $f(x)$ په لاندې توګه شکل غوره کوي:

$$f(x) = (x-\alpha)^2\varphi_1(x)$$

که په همدې توګه استدلال ته دوام ورکړو، پايله ترلاسه کېږي چې:

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda \Rightarrow f(x) = A(x-\alpha)^m$$

د $f(1) = 0$ او $f(0) = 1$ شرطونو لپاره لرو چې:

$$f(1) = 0 \Rightarrow A(1-\alpha)^m = 0$$
$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = 1$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow A(0-\alpha)^m = 1$$
$$\Rightarrow A(-1)^m = 1 \ ; \quad \alpha = 1$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow A &= \frac{1}{(-1)^m} \\
&= (-1)^{-m} \\
&= \left[(-1)^{-1}\right]^m \\
&= \left(\frac{1}{-1}\right)^m \\
&= (-1)^m
\end{aligned}
$$

$$f(x) = (-1)^m (x-1)^m$$

20 **ځواب)**

د فرما قضیې مطابق $a^p - a$، $b^p - b$ پر p د تقسیم وړ دي، پر دې اساس تفاضل یې یعنې $a^p - b^p - (a-b)$ هم پر p د تقسیم وړتیا لري. له بل پلوه د فرضیې مطابق $a^p - b^p$ د p مضرب دی، نو $a-b$ به هم پر p د تقسیم وړتیا ولري ، فرضوو چې $a-b = pt$ وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$
\begin{aligned}
a^p - b^p &= (b+pt)^p - b^p \\
&= \left[b^p + p.b^{p-1}pt + \frac{p(p-1)}{2}b^{p-2}P^2t^2 + \ldots + p^p t^p\right] - b^p \\
&= p.b^{p-1}pt + \frac{p(p-1)}{2}b^{p-2}P^2t^2 + \ldots + p^p t^p \\
&= p^2\left[b^{p-1}t + \frac{p(p-1)}{2}b^{p-2}t^2 + \ldots + p^{p-2}t^p\right]
\end{aligned}
$$

پر دې اساس $a^p - b^p$ پر p^2 د تقسیم وړ دی.

21 **ځواب)** فرض کړئ a د یوه خلاف او د $x^3 = 1$ معادلې یو جذر وي، لاندې تابع په پام کې نیسو:

$$f(x) = (1+x)^{2k} + x^{2k} + 1$$

واضح ښکاري چې :

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= (1+\alpha)^{2k} + \alpha^{2k} + 1 \\
&= \left(-\alpha^2\right)^{2k} + \alpha^{2k} + 1 \\
&= \left(\alpha^3\right)^k \cdot a^k \alpha^{\alpha k} + \alpha^{2k} + 1 \\
&= \alpha^{2k} + \alpha^k + 1 \\
&= \frac{\left(\alpha^3\right)^k - 1}{\alpha^k - 1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

په همدې توګه:

$$f\left(\alpha^2\right)=\left(1+\alpha^2\right)^{2k}+\alpha^{4k}+1=\alpha^{2k}+\alpha^k+1=0$$

پر دې اساس $\alpha^{2k} f(x)$ تابع پر $a^2(x-a)\left(x-a^2\right)=a^2\left(x^2+x+1\right)(a\neq 0)$ د تقسیم وړ ده

چې د $x=\dfrac{b}{a}$ لپاره دا معنا لري چې $(a+b)^{2k}+a^{2k}+b^{2k}$ افاده پر a^2+ab+b^2 د تقسیم وړ ده.

22 ځواب)

$$x+2=0\Rightarrow x=-2$$

-2	1	2	0	1	-9
	1	0 $1\times(-2)+2=0$	0 $0\times(-2)+0=0$	1 $0\times(-2)+1=1$	-11

$$R=-11$$
$$q(x)=x^3+0x^2+0x+1\Rightarrow q(x)=x^3+1$$

23 ځواب)

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

2	1	0	-3	0	2	1
	1	2 $2\times1+0=2$	1 $2\times2+(-3)=1$	2 $1\times2+(0)=2$	6 $2\times2+2=6$	13 $(6\times2)+1=13$

$$R=13$$
$$q(x)=x^4+2x^3+x^2+2x+6$$

24 ځواب)

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

2	1	1	-3	2	-1
	1	3	3	8	15

$$Q(x)=x^3+3x^2+3x+8$$

25 ځواب)

$$x+1=0\Rightarrow x=-1$$
$$p(-1)=3(-1)^3+5(-1)^2+3(-1)+1\Rightarrow p(-1)=-3+5-3=1$$
$$\Rightarrow p(-1)=R=0$$

$q(x)$ دويمه درجه خارج قسمت دی:

$$P(x)=3x^3+5x^2+3x+1\Rightarrow 3x^3+5x^2+3x+1=(x+1)\left(ax^2+bx+c\right)+0$$
$$\Rightarrow 3x^3+5x^2+3x+1=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c$$
$$\Rightarrow 3x^3+5x^2+3x+1=ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c$$

$$\left.\begin{cases} a=3 \\ a+b=5 \\ b+c=3 \\ c=1 \end{cases}\right\rangle a=3 \;,\; b=2 \;,\; c=1$$

$$q(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow q(x)=3x^2+2x+1$$

26 ځواب)

درجه خارج قسمت $:n-m=(4)-(2)=2$

د خارج قسمت درجه 2 ده، یعنې خارج قسمت یوه دویمه درجه معادله ده:

$$\begin{array}{l|l} ax^4+bx+2 & x^2+2 \\ \cline{2-2} \quad\vdots & ax^2+mx+n \\ \cline{1-1} \;3x-1 & \end{array}$$

$$ax^4+bx+2=(x^2+2)(ax^2+mx+n)+(3x-1) \Rightarrow ax^4+bx+2=ax^4+mx^3+nx^2+2ax^2+2mx+2n+3x-1$$

$$\Rightarrow ax^4+bx+2=ax^4+mx^3+(n+2a)x^2+(2m+3)x+2n-1$$

$$\left.\begin{cases} m=0 \\ n+2a=0 \\ 2m+3=b \\ 2=2n-1 \end{cases}\right\rangle m=0, b=3\,, n=\frac{3}{2}, a=-\frac{3}{4}$$

خارج قسمت $:q(x)=ax^2+mx+n \Rightarrow q(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}$

27 ځواب)

$$2x+4=0 \Rightarrow x=-2$$

$$R=p(-2) \Rightarrow R=8(-2)^3+22(-2)^2+22(-2)+17$$

$$\Rightarrow R=-3$$

خارج قسمت دویمه درجه دی.

$$8x^3+22x^2+22x+17=(2x+4)(ax^2+bx+c)-3$$

$$8x^3+22x^2+22x+17=2ax^3+2bx^2+2cx+4ax^2+4bx+4c-3$$

$$8x^3+22x^2+22x+17=2ax^3+(2b+4a)x^2+(2c+4b)x+4c-3$$

$$\left.\begin{cases} 2a=8 \\ 2b+4a=22 \\ 2c+4b=22 \\ 4c-3=17 \end{cases}\right\rangle a=4, b=3, c=5$$

خارج قسمت $:q(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow q(x)=4x^2+3x+5$

28 ځواب)

د تقسيم خارج قسمت 4 درجه دی او کولی شو، داسې يې فرض کړو:

$$\begin{cases} q(x)=b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4 \\ p(x)=(x-2)q(x)+R \end{cases}$$

$$x^5-3x^3+2x+1=(x-2)\left(b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4\right)+R$$
$$x^5-3x^3+2x+1=\left(b_0x^5+b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+b_4x-2b_0x^4-2b_1x^3-2b_2x^2-2b_3x-2b_4\right)+R$$
$$x^5-3x^3+2x+1=b_0x^5+(b_1-2b_0)x^4+(b_2-2b_1)x^3+(b_3-2b_2)x^2+(b_4-2b_3)x+(-2b_4+R)$$
$$b_0=a_0=1$$
$$b_1=a_1+ab_0=0+2\times1=2$$
$$b_2=a_2+ab_1=-3+2\times1=1$$
$$b_3=a_3+ab_2=0+2\times1=2$$
$$b_4=a_4+ab_3=2+2\times1=6$$
$$R=a_5+ab_4=1+2\times6=13\Rightarrow R=13$$
$$q(x)=x^4+2x^3+x^2+2x+6$$

پام وکړئ چې د هورنر جدول د دغه طريقې پر اساس منځته راغلی.

29 ځواب)

$$\begin{aligned}(x-2)^4&=(x-2)(x-2)^3\\ &=(x-2)\underbrace{\left(x^3-6x^2+12x-8\right)}_{q(x)}\end{aligned}$$
$$x^3-6x^2+12x-8=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow a=-6\,,b=12\,,c=-8$$

30 ځواب)

$$x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1$$
$$p(x)=\left(x^3\right)^9-2\left(x^3\right)^2+3\left(x^3\right)x^2-\left(x^3\right)+1$$
$$\begin{aligned}R=p\left(x^3=-1\right)&\Rightarrow R=(-1)^9-2(-1)^2+3(-1)x^2-(-1)+1\\ &\Rightarrow R=-1-2-3x^2+1+1\\ &\Rightarrow R=-3x^2-1\end{aligned}$$

31 ځواب)

$$\begin{cases} x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1 \\ p(x)=\left(x^2\right)^4+2\left(x^2\right)^2x+\left(x^2\right)x-\left(x^2\right)+x \end{cases}$$
$$R=p\left(x^2-1\right)\Rightarrow R=(-1)^4+2(-1)^2x+(-1)x-(-1)+x$$

$$\Rightarrow R = 2x + 2$$

$$\begin{cases} x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \\ p(x) = (x^3)^2 x^2 + 2(x^3)x^2 + (x^3) - x^2 + x \end{cases}$$

$$R = p(x^3 = 1) \Rightarrow R = (1)^2 x^2 + 2(1)x^2 + (1) - x^2 + x$$

$$\Rightarrow R = 2x^2 + x + 1$$

32 ځواب)

$$\begin{cases} ax^n + b = 0 \Rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \\ p(x) = a.(x^n)^3 x^2 + b(x^n)^2 x + c \end{cases}$$

$$R = p\left(x^n = -\frac{b}{a}\right) \Rightarrow R = a.\left(-\frac{b}{a}\right)^3 x^2 + b\left(-\frac{b}{a}\right)^2 x + c$$

$$\Rightarrow R = p\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^2}x^2 + \frac{b^3}{a^2} + c$$

$$\Rightarrow R = -\frac{b^3}{a^2}x^2 + \frac{b^3}{a^2} + c$$

33 ځواب)

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \\ p(x) = (x^2)x + ax + b \end{cases}$$

$$R = p(x^2 = -1) \Rightarrow 2x - 6 = (-1)x + ax + b$$

$$\Rightarrow 2x - 6 = x(a-1) + b \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3 \\ b = -6 \end{cases}$$

34 ځواب)

$$\begin{cases} p(x) = x^{47} = (x^3)^{15} x^2 \\ x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \end{cases}$$

$$R = p(x^3 = -1) \Rightarrow R = (-1)^{15} x^2$$

$$\Rightarrow R = -x^2$$

35 ځواب)

$$x\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \Rightarrow x\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$p(x) = x^3\cos^3\alpha - mx\sin 2\alpha + \sin^3\alpha \Rightarrow p(x) = x^3\cos^3\alpha - 2mx\sin\alpha.\cos\alpha + \sin^3\alpha$$

$$\Rightarrow p(x) = (x\cos\alpha)^3 - 2m\sin\alpha(x\cos\alpha) + \sin^3\alpha$$

$$\Rightarrow p(x) = (\sin\alpha)^3 - 2m\sin\alpha(\sin\alpha) + \sin^3\alpha$$

$$\Rightarrow p(x)=\sin^3\alpha-2m\sin^2\alpha+\sin^3\alpha$$
$$\Rightarrow p(x)=2\sin^3\alpha-2m\sin^2\alpha$$

$p(x)$ پر $x\cos\alpha-\sin\alpha$ د تقسیم وړتیا لري :

$$p(x)=R=0\Rightarrow 2\sin^3\alpha-2m\sin^2\alpha=0$$
$$\Rightarrow 2\sin^2\alpha(\sin\alpha-m)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2\sin^2\alpha=0\\ \sin\alpha-m=0\Rightarrow m=\sin\alpha\end{cases}$$

36 ځواب)

پر x^3+1 د $p_1(x)$ دباقیمانده مساوي په 1 ده.

$$\begin{cases}x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1\\ p_1(x)=ax^6+bx^3+1\Rightarrow p_1(x)=a(x^3)^2+b(x^3)+1\end{cases}$$
$$p_1(x^3=-1)=1\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+1=1$$
$$\Rightarrow a-b=0$$
$$\Rightarrow a=b$$

پر $x+2$ د $p_2(x)$ تقسیم باقیمانده:

$$\begin{cases}x+2=0\Rightarrow x=-2\\ p_2(x)=x^2+ax+2b\end{cases}$$
$$R=p_2(x=-2)\Rightarrow R=(-2)^2+a(-2)+2b$$
$$\Rightarrow R=4-2a+2b\quad;\quad a=b$$
$$\Rightarrow R=4-2a+2b$$
$$\Rightarrow R=4$$

37 ځواب)

$$\begin{cases}x^2+3=0\Rightarrow x^2=-3\\ p(x)=2x^3+ax^2+bx+3\Rightarrow p(x)=2(x^2)x+a(x^2)+bx+3\end{cases}$$
$$p(x^2=-3)=0\Rightarrow 2(-3)x+a(-3)+bx+3=0$$
$$\Rightarrow -6x+bx-3a+3=0$$
$$\Rightarrow x(-6+b)+(3-3a)=0\Rightarrow\begin{cases}-6+b=0\Rightarrow b=6\\ 3-3a=0\Rightarrow a=1\end{cases}$$

38 ځواب)

$$\begin{cases} x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2=-x-1 \\ p(x)=\left(x^2\right)^2 x+x+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R=p\left(x^2=-x-1\right) \Rightarrow R &= (-x-1)^2 x+x+1 \\ &= \left(x^2+2x+1\right)x+x+1 \\ &= [(-x-1)+2x+1]x+x+1 \\ &= (x)x+x+1 \\ &= \left(x^2\right)+x+1 \\ &= (-x-1)+x+1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

39 ځواب)

$$\begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x^2=0 \\ p(x)=x^6+ax^4+bx^3+1 \Rightarrow p(x)=\left(x^2\right)^3+a\left(x^2\right)^2+b\left(x^2\right)x+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(1)=0 &\Rightarrow (1)^3+a(1)^2+b(1)x+1=0 \\ &\Rightarrow 1+a+bx+1=0 \\ &\Rightarrow bx+(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b-4a &= 3(0)-4(-2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

40 ځواب)

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y$$

$$\begin{aligned} p(x=-y) &= [(-y)+y+z]^3-(-y)^3-y^3-z^3 \\ &= z^3+y^3-z^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

41 ځواب)

پر x^3+1 د $p(x)$ تقسيم باقيمانده مساوي په 1 ده:

$$\begin{cases} x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \\ p(x)=ax^6+bx^3+1 \Rightarrow p(x)=a\left(x^3\right)^2+b\left(x^3\right)+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p\left(x^2=-1\right)=R &\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+1=1 \\ &\Rightarrow a-b=0 \end{aligned}$$

پر $x+2$ د $g(x)$ تقسيم باقيمانده:

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ g(x)=x^2+ax+2b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R=g(x=-2) &\Rightarrow R=(-2)^2+a(-2)+2b \\ &\Rightarrow R=-2a+2b+4 \\ &\Rightarrow R=-2(a-b)+4 \ ; \quad (a-b=0) \\ &\Rightarrow R=-2(0)+4 \\ &\Rightarrow R=4 \end{aligned}$$

ځواب) 42

$$\begin{cases} x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \\ f(x)=x^6+x^3+1 \Rightarrow f(x)=\left(x^2\right)^3+x\left(x^2\right)+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R=f\left(x^2=-1\right) &\Rightarrow R=(-1)^3+x(-1)+1 \\ &\Rightarrow R=-x \end{aligned}$$

ځواب) 43

لومړی حالت : $if \ x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=3 \\ g(1)=3 \end{cases}$

په دې حالت کې مسئله ثبوت ده.

دويم حالت : $if \ \ x \neq 1$

ثابتوو چې $(x-1)f(x)$ پر $(x-1)g(x)$ د تقسيم وړتيا لري:

$$\begin{aligned} (x-1)g(x)=0 &\Rightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)=0 \\ &\Rightarrow x^3-1=0 \\ &\Rightarrow x^3=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-1)f(x) &= (x-1)\left(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}\right) \\ &= (x-1)\left[\left(x^3\right)^m+x\left(x^3\right)^n+x^2\left(x^3\right)^p\right] \\ &= (x-1)\left(1+x+x^2\right) \\ &= x^3-1 \\ &= 1-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ثبوت شوه چې $(x-1)f(x)$ پر $(x-1)g(x)$ د $x \neq 1$ په صورت کې د تقسيم وړتيا لري، په دې توګه د x ټولو حقيقي قيمتونو ته $f(x)$ پر $g(x)$ افاده د تقسيم وړ دی.

44 ځواب)

د $x=1$ لپاره د مسئلې حکم سم دی.

د $x\neq 1$ لپــــاره مقســــوم او مقســـــوم علیـــــه لـــــه $x-1$ سره ضربــــوو، ثبوتــــوو چــــې $(x-1)\left(x^{5m}+x^{5n+1}+x^{5p+2}+x^{5q+3}+x^{5r+4}\right)$ افـاده پـر $(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$ د تقسـیم وړ ده.

$$x^5-1=0 \Rightarrow x^5=1$$

$$\begin{aligned}(x-1)\left[\left(x^5\right)^m+\left(x^5\right)^m x+\left(x^5\right)^p x^2+\left(x^5\right)^q x^3+\left(x^5\right)^r x^4\right]&=(x-1)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\\&=x^5-1\\&=1-1\\&=0\end{aligned}$$

45 ځواب)

$$\left(x^{n+1}-1\right)=(x-1)\left(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1\right)$$

که $p(x)$ پر $x^{n+1}-1$ یا $(x-1)\left(x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1\right)$ د تقسیم وړتیا ولري نو د مقسوم علیـه پـر هر یوه عامل یعنې $(x-1)$ او $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$ د تقسیم وړتیا لري.

مثلاً که یوه افاده پر x^5+1 د تقسیم وړتیا ولـري (د مقسـوم علیـه پـر عاملونـه) یعنـې، پـر $(x+1)$ او $\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)$ هم د تقسیم وړ دي، ځکه:

$$x^5+1=(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)$$

پایله: که یوه افاده پر بله افاده د تقسیم وړتیا ولري، د هغې افادې پر عاملونو هم د تقسیم وړتیا لري.

46 ځواب)

اړینه ده ثبوت کړو چې $A(x)$ پر x^7+1 د تقسیم وړتیا لري.

$$x^7+1=(x+1)\left(x^6-x^5+x^4-\ldots.+1\right)$$

$$\begin{cases}x^7+1=0 \Rightarrow x^7=-1\\ A(x)=\left(x^7\right)^{2p}x^6-\left(x^7\right)^{2q}x^5+\left(x^7\right)^{2r}x^4-\left(x^7\right)^{2r}x^3+\left(x^7\right)^{2s}x^2-\left(x^7\right)^{2s}x+\left(x^7\right)^{2t}\end{cases}$$

$$R=A\left(x^7=-1\right)\Rightarrow R=(-1)^{2p}x^6-(-1)^{2q}x^5+(-1)^{2r}x^4-(-1)^{2r}x^3+(-1)^{2s}x^2-(-1)^{2s}x+(-1)^{2t}$$

$$\Rightarrow R=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

$A(x)$ پـر فـرض شـوي افـادې د تقسـیم وړ ده، پـه پایلـه کـې پـر $x^6-x^5+x^4-\cdots+1$ د $R(x)$ باقیمانده مساوي په صفر ده.

47 ځواب) که $p(x)$ پر $x^5-1=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)=(x-1)g(x)$ د تقسیم وړ وي، ثبوتوو چې $p(x)$ پر $g(x)$ د تقسیم وړ دی.

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0 \Rightarrow (x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)=0$$

$$\Rightarrow x^5-1=0$$

$$\Rightarrow x^5 = 1$$

$$\begin{cases} x^5 = 1 \\ p(x) = (x^5)^n x^4 + (x^5)^m x^3 + (x^5)^k \cdot x^2 + (x^5)^r \cdot x + (x^5)^s \end{cases}$$

$$R = p(x^5 = 1) \Rightarrow R = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
$$\Rightarrow R = 0$$

48 ځواب)

$$p(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} \Rightarrow (x^2 - 1)p(x) = (x^2 - 1)(x^{2n} + \cdots + x^4 + x^2 + 1)$$
$$\Rightarrow (x^2 - 1)p(x) = (x^{2n+2} - 1)$$
$$\Rightarrow p(x) = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}$$

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \Rightarrow (x-1)g(x) = (x-1)(x^n + \cdots + x + 1)$$
$$\Rightarrow (x-1)g(x) = (x^{n+1} - 1)$$
$$\Rightarrow g(x) = \frac{(x^{n+1} - 1)}{(x-1)}$$

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}}{\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}} = \frac{(x^{2n+2} - 1)(x-1)}{(x^2 - 1)(x^{n+1} - 1)} = \frac{(x^{n+1} - 1)(x^{n+1} - 1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^{n+1} - 1)} = \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1}$$

باید $x^{n+1} + 1$ پر $x + 1$ د تقسیم وړتیا ولري:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ p_1(x) = x^{n+1} + 1 \end{cases}$$

$$p_1(x = -1) = R \Rightarrow (-1)^{n+1} + 1 = R$$
$$if \quad n = 2k \Rightarrow R = 0$$

د لاندې شرط په صورت کې $p(x), n = 2k$ پر $g(x)$ د تقسیم وړتیا لري.

49 ځواب)

پر $x^2 + 1$ د $f(x)$ باقیمانده مساوي په -1 ده:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

$$f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f(x) = (x^2)^2 x + a(x^2)^2 + b(x^2)x + c(x^2) + dx + e$$
$$f(x^2 = -1) = -1 \Rightarrow (-1)^2 x + a(-1)^2 + b(-1)x + c(-1) + dx + e = -1$$
$$\Rightarrow x + a - bx - c + dx + e = -1$$
$$\Rightarrow x(1 - b + d) + (a - c + e) = -1 \qquad \text{(I)}$$

پر $x^3 + 1$ د $f(x)$ باقیمانده مساوي په 1 ده:

$$\begin{cases} x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \\ f(x)=\left(x^3\right)x^2+a\left(x^3\right)x+b\left(x^3\right)+cx^2+dx+e \end{cases}$$

$$f\left(x^3=-1\right)=1 \Rightarrow (-1)x^2+a(-1)x+b(-1)+cx^2+dx+e=1$$
$$\Rightarrow -x^2-ax-b+cx^2+dx+e=1$$
$$\Rightarrow x^2(-1+c)+x(-a+d)+(e-b)=1 \quad \cdots(\mathrm{II})$$

دوو I او (II) سیستمونو له حل څخه:

$$\left.\begin{cases} d-b+1=0 \\ a-c+e=-1 \\ c-1=0 \\ d-a=0 \\ e-b=1 \end{cases}\right\rangle a=-1, b=0, c=1, d=-1, e=1$$

$$f(x)=x^5-x^4+x^2-x+1$$

50 **ځواب)**

$$\begin{cases} x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2=-x-1 \\ p(x)=x^5+x+1 \Rightarrow p(x)=\left(x^2\right)^2x+x+1 \end{cases}$$

$$R=p\left(x^2=-x-1\right) \Rightarrow R=(-x-1)^2x+x+1$$
$$\Rightarrow R=\left(x^2+2x+1\right)x+x+1$$
$$\Rightarrow R=\left(x^2\right)x+2\left(x^2\right)+x+x+1$$
$$\Rightarrow R=(-x-1)x+2(-x-1)+2x+1$$
$$\Rightarrow R=-\left(x^2\right)-x-2x-2+2x+1$$
$$\Rightarrow R=-(-x-1)-x-2x-2+2x+1$$
$$\Rightarrow R=x+1-x-2x-2+2x+1$$
$$\Rightarrow R=0$$

51 **ځواب)**

$$\begin{cases} x^2-x=0 \Rightarrow x^2=x \\ p(x)=x^8+2x^5+x^3-x^2+x \Rightarrow p(x)=\left(x^2\right)^4+2\left(x^2\right)^2x+\left(x^2\right)x-\left(x^2\right)+x \end{cases}$$

$$R=p\left(x^2=x\right) \Rightarrow R=(x)^4+2(x)^2x+(x)x-(x)+x$$
$$\Rightarrow R=\left(x^2\right)^2+2\left(x^2\right)x+\left(x^2\right)$$
$$\Rightarrow R=(x)^2+2(x)x+(x)$$
$$\Rightarrow R=x^2+2x^2+x$$

$$\Rightarrow R = 3x^2 + x$$
$$\Rightarrow R = 3(x) + x$$
$$\Rightarrow R = 4x$$

52 ځواب)

$$\begin{cases} x^2 - mx + n = 0 \Rightarrow x^2 = mx - n \\ p(x) = x^4 + 1 \Rightarrow p(x) = (x^2)^2 + 1 \end{cases}$$

$p(x)$ پر $x^2 - mx + n$ د تقسيم وړ ده .

$$R = p(x^2 = mx - n) = 0 \Rightarrow (mx - n)^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow m^2x^2 + n^2 - 2mnx + 1 = 0$$
$$\Rightarrow m^2(mx - n) + n^2 - 2mnx + 1 = 0$$
$$\Rightarrow m^3x - m^2n + n^2 - 2mnx + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (m^3 - 2mn)x - m^2n + n^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 2mn = 0 \Rightarrow m = 0, m^2 = 2n \\ n^2 - m^2n + 1 = 0 \end{cases}$$
$$if \ \ m = 0 \Rightarrow n^2 - (0)^2 n + 1 = 0 \Rightarrow n^2 + 1 = 0$$

د $m = 0$ لپاره معادله حقيقي ځواب نلري.

$$if \ \ m^2 = 2n \Rightarrow n^2 - (2n).n + 1 = 0$$
$$\Rightarrow n^2 - 2n^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -n^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -n^2 = -1$$
$$\Rightarrow n^2 = 1$$
$$\Rightarrow n = \pm 1$$
$$if \ \ n = -1 \Rightarrow m^2 = 2 \times (-1) \ ; \ m^2 = 2n$$
$$if \ \ n = 1 \quad \Rightarrow m^2 = 2 \times 1 \quad ; \quad (m^2 = 2n)$$
$$\Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

د $n = -1$ لپاره د m قيمت ترلاسه کېدلی شي.

په کلي حالت کې:

$$\begin{cases} n = 1 \\ m = \sqrt{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} n = 1 \\ m = -\sqrt{2} \end{cases}$$

53 ځواب)

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \\ p(x) = x^{3k} \Rightarrow p(x) = (x^2x)^k \end{cases}$$

$$R=p\left(x^2=-x-1\right)\Rightarrow R=\left[\left(-x-1\right)x\right]^k$$
$$\Rightarrow R=\left(-x^2-x\right)^k$$
$$\Rightarrow R=\left[-\left(-x-1\right)-x\right]^k$$
$$\Rightarrow R=(1)^k$$
$$\Rightarrow R=(1)$$

54 ځواب)

$$\begin{cases} x^2-x=0\Rightarrow x^2=x \\ p(x)=x^5+x^3+7\Rightarrow p(x)=\left(x^2\right)^2x+\left(x^2\right)x+7 \end{cases}$$
$$R=p\left(x^2=x\right)\Rightarrow R=(x)^2x+(x)x+7$$
$$\Rightarrow R=\left(x^2\right)x+\left(x^2\right)+7$$
$$\Rightarrow R=x^2+x+7$$
$$\Rightarrow R=x+x+7$$
$$\Rightarrow R=2x+7$$

55 ځواب)

$$\begin{cases} x^2-x+1=0\Rightarrow x^2=x-1 \\ f(x)=x\left(x^2\right)^2-4\left(x^2\right)^2-4\left(x^2\right)+\left(x^2\right)-4x+4 \end{cases}$$
$$R=f\left(x^2=x-1\right)\Rightarrow R=x(x-1)^2-4(x-1)^2-4(x-1)+(x-1)-4x+4$$
$$\Rightarrow R=x\left(x^2-2x+1\right)-4\left(x^2-2x+1\right)+4x^2-4x+x-1-4x+4$$
$$\Rightarrow R=x^3-2x^2+x-4x^2+8x-4+4x^2-4x+x-1-4x+4$$
$$\Rightarrow R=x^3-2x^2+2x-1$$
$$\Rightarrow R=x\left(x^2\right)-2\left(x^2\right)+2x-1$$
$$\Rightarrow R=x(x-1)-2(x-1)+2x-1$$
$$\Rightarrow R=x^2-x-2x+2+2x-1$$
$$\Rightarrow R=x^2-x+1$$
$$\Rightarrow R=(x-1)-x+1$$
$$\Rightarrow R=0$$

56 ځواب)

$$\begin{cases} (x-1)^2=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x^2=2x-1 \\ f(x)=2x\left(x^2\right)^2-4x\left(x^2\right)^2+3x\left(x^2\right)-\left(x^2\right)-x+1 \end{cases}$$
$$R=f\left(x^2=2x-1\right)\Rightarrow R=2x(2x-1)^2-4x(2x-1)^2+3x(2x-1)-(2x-1)-x+1$$

$$\Rightarrow R=2x\left(4x^2-4x+1\right)-4\left(4x^2-4x+1\right)+6x^2-3x-2x+1-x+1$$
$$\Rightarrow R=8x^3-8x^2+2x-16x^2+16x-4+6x^2-3x-2x+1-x+1$$
$$\Rightarrow R=8x^3-18x^2+12x-2$$
$$\Rightarrow R=8x\left(x^2\right)-18\left(x^2\right)+12x-2$$
$$\Rightarrow R=8x(2x-1)-18(2x-1)+12x-2$$
$$\Rightarrow R=16x^2-32x+16$$
$$\Rightarrow R=16(2x-1)-32x+16$$
$$\Rightarrow R=0$$

57 **ځواب)**

د هرې يوې عادي حل لارې ازموينه، لکه:

1) مستقيم تقسيم او له صفر سره د باقيمانده متحد کول.

2) د $x^2=-xm-n$ په وضع کولو سره د تقسيم باقيمانده محاسبه کول او وروسته يې له صفر سره متحد کول.

3) د نامعينو ضريبونو طريقې کارونه.

دغه ټولې حل لارې موږ ډېرو اوږدو او سترو عمليو ترسره کولو ته مجبوروي، خو دغه مسئله ډېره ساده حل لاره لري، پام وکړئ:

يادونه : $\left(a^2+b^2\right)=(a+b)^2-2ab$

$$\begin{aligned}4x^4+a^2&=\left(2x^2\right)^2+a^2\\&=\left(2x^2+a\right)^2-4ax^2\\&=\left(2x^2+2\sqrt{a}x+a\right)\left(2x^2-2\sqrt{a}x+a\right)\\&=4\left[x^2+\sqrt{a}x+\frac{a}{2}\right]\left[x^2-\sqrt{a}x+\frac{a}{2}\right]\end{aligned}$$

که د مقسوم او مقسوم عليه عاملونه سره پرتله کړو، نو لرو چې:

$$x^2+mx+n=x^2+\sqrt{a}x+\frac{a}{2}\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{a}\\ n=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

$$x^2+mx+n=x^2-\sqrt{a}x+\frac{a}{2}\Rightarrow\begin{cases}m=-\sqrt{a}\\ n=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

58 ځواب)

$$\begin{cases} x^2-ax+a^2=0 \Rightarrow x^2=ax-a^2 \\ p(x)=x^4+ma^2x^2+a^4 \Rightarrow p(x)=(x^2)^2+ma^2(x^2)+a^4 \end{cases}$$

$$R=p(x^2=ax-a^2)=0 \Rightarrow (ax-a^2)^2+ma^2(ax-a^2)+a^4=0$$
$$\Rightarrow (a^2x^2-2a^3x+a^4)+ma^3x-ma^4+a^4=0$$
$$\Rightarrow a^2(ax-a^2)-2a^3x+a^4+ma^3x-ma^4+a^4=0$$
$$\Rightarrow a^3x-a^4-2a^3x+a^4+ma^3x-ma^4+a^4=0$$
$$\Rightarrow -a^3x+ma^{3x}+a^4-ma^4=0$$
$$\Rightarrow a^3x(m-1)-a^4(m-1)=0$$
$$\Rightarrow (m-1)(a^3x-a^4)=0$$
$$\Rightarrow a^2(m-1)(x-a)=0$$
$$R=a^2(m-1)(x-a) \Rightarrow R=0 \quad ; \quad (if \quad m=1)$$

ځواب $m=1$ دی.

59 ځواب)

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

$p(x)$ پر x^2-x-2 د تقسیم وړتیا لري.

$$\begin{cases} p(-1)=0 \\ p(2)=0 \end{cases}$$

$$if \quad p(-1)=0 \Rightarrow 2a(-1)^4+(b-2a)(-1)^3-b(-1)^2-4b(-1)-4=0$$
$$\Rightarrow 2a-b+2a-b+4b-4=0$$
$$\Rightarrow 4a+2b=4 \Rightarrow 2a+b=0 \qquad (\mathrm{I})$$
$$if \quad p(2)=0 \Rightarrow 2a(2)^4+(b-2a)(2)^3-b(2)^2-4b(2)-4=0$$
$$\Rightarrow 32a+8b-16a-4b-8b-4=0$$
$$\Rightarrow 16a-4b=4 \Rightarrow 4a-b=1 \qquad (\mathrm{II})$$
$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}) \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=2 \\ 4a-b=1 \end{cases} \Big\rangle \begin{cases} b=1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

60 ځواب)

که α او β د ax^2+bx+c دویمه درجه معادلې جذرونه وي:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$p(x)=[a(x-\alpha)(x-\beta)]q(x)+(kx+s)$$

دې ته په پام سره چې مقسوم علیه دویمه درجه دی ، نو باقیمانده لومړۍ درجه ده چې په $R=kx+s$ شکل څرګندېږي.

$$\left.\begin{array}{l} if\ x=\alpha \Rightarrow p(\alpha)=k\alpha+s \\ if\ \ x=\beta \Rightarrow p(\beta)=k\beta+s \end{array}\right\rangle (-1)\times\begin{cases} k\alpha+s=p(\alpha) \\ k\beta+s=p(\beta) \end{cases}\left.\right\rangle\begin{cases} k\alpha+s=p(\alpha) \\ -k\beta-s=-p(\beta) \end{cases}\left.\right\rangle\begin{cases} k=\dfrac{p(\alpha)-p(\beta)}{\alpha-\beta} \\ s=\dfrac{\alpha p(\beta)-\beta p(\alpha)}{\alpha-\beta} \end{cases}$$

$$R=kx+s \Rightarrow R=\frac{p(\alpha)-p(\beta)}{\alpha-\beta}x+\frac{\alpha p(\beta)-\beta p(\alpha)}{\alpha-\beta}$$

$p(\alpha)$ او $p(\beta)$ په ترتیب پر $(x-\alpha)$ او $(x-\beta)$ د $p(x)$ باقیمانده دي.

61 ځواب)

$$\begin{cases} p(x)=ax^3-4x^2+bx+6 \\ x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=3, x=-2 \end{cases}$$

$p(x)$ پر x^2-x-6 د تقسیم وړتیا لري:

$$\text{(شرط}\ \begin{cases} p(3)=0 \\ p(-2)=0 \end{cases}$$

$$if \qquad p(3)=0 \Rightarrow a(3)^3-4(3)^2+b(3)+6=0$$
$$\Rightarrow 27a+3b=30$$

$$if \qquad p(-2)=0 \Rightarrow a(-2)^3-4(-2)^2+b(-2)+6=0$$
$$\Rightarrow -8a-16-2b+6=0$$
$$\Rightarrow -8a-2b-10=0$$
$$\Rightarrow -4a-b=5$$

$$\begin{cases} 27a+3b=30 \\ -4a-b=5 \end{cases}\left.\right\rangle\begin{cases} a=3 \\ b=-17 \end{cases}$$

62 ځواب)

$$\begin{cases} p(x)=ax^4+bx^2+2 \\ x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1, x=2 \end{cases}$$

$p(x)$ پر x^2-3x+2 د تقسیم وړتیا لري:

$$\left.\begin{cases} if \quad p(1)=0 \Rightarrow a+b+2=0 \\ if \quad p(2)=0 \Rightarrow 16a+4b+2=0 \end{cases}\right\rangle \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

63 ځواب)

$$\begin{cases} p(x)=\left(x^2\right)^2+4 \\ x^2-bx+a=0 \Rightarrow x^2=bx-a \end{cases}$$

$$R=p\left(x^2=bx-a\right)=0 \Rightarrow (bx-a)^2+4=0$$
$$\Rightarrow b^2x^2-2abx+a^2+4=0$$
$$\Rightarrow b^2(bx-a)-2abx+a^2+4=0$$
$$\Rightarrow b^3x-b^2a-2abx+a^2+4=0$$
$$\Rightarrow \left(b^3-2ab\right)x+a^2-ab^2+4=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b^3-2ab=0 \Rightarrow b\left(b^2-2a\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b^2=2a \end{cases} \\ a^2-ab^2+4=0 \end{cases}$$

$$if \quad b=0 \Rightarrow a^2-a(0)^2+4=0 \Rightarrow a^2+4=0$$

که $b=0$ وي د a د حل لپاره ځواب نلري.

$$if \quad b^2=2a \Rightarrow a^2-a(2a)+4=0$$
$$\Rightarrow a^2-2a^2+4=0$$
$$\Rightarrow -a^2+4=0$$
$$\Rightarrow a^2=4$$
$$\Rightarrow a=\pm 2$$

دې ته په پام سره چې $b^2=2a>0$ دی، یعنې $a=2$ د منلو وړ دی.

$$if \quad a=2 \Rightarrow b^2=4$$
$$\Rightarrow b=\pm 2$$

64 ځواب)

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1, x=2$$
$$if \quad f(1)=0 \Rightarrow 1+n+(3m+n)-7+2(2m-n)-8=0$$
$$\Rightarrow 7m-14=0$$

$$if \quad f(2)=0 \Rightarrow 32+16n+(3m+n)8-28+4(2m-n)-8=0$$
$$\Rightarrow 32m+20n-4=0$$
$$\left.\begin{cases} 7m-14=0 \\ 32m+20n-4=0 \end{cases}\right\rangle \begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$$

65 ځواب)

1)

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1, x=2 \\ f(x)=a(x-2)^{2n}+b(x-1)^n-1 \end{cases}$$
$$\left.\begin{cases} if \quad f(1)=0 \Rightarrow a(-1)^{2n}+b(0)^n-1=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ if \quad f(2)=0 \Rightarrow a(2-2)^{2n}+b(2-1)^n-1=0 \Rightarrow b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases}\right\rangle a=b=1$$

2)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^{2n}+(x-1)^n-1 \\ &= \left[(x-2)^{2n}+(x-2)\right]+\left[(x-1)^n-(x-1)\right] \\ &= (x-2)\left[(x-2)^{2n-1}+1\right]+(x-1)\left[(x-1)^{n-1}-1\right] \\ &= (x-2)\{(x-2+1)\left[(x-2)^{2n-2}-(x-2)^{2n-3}+\cdots+1\right]\}+(x-1)\{(x-1-1)\left[(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-3}+\cdots+1\right]\} \\ &= (x-2)(x-1)\left[(x-2)^{2n-2}-(x-2)^{2n-3}+\cdots+1\right]+(x-1)(x-2)\cdot\left[(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-3}+\cdots+1\right] \\ &= (x-2)(x-1)\underbrace{\{\left[(x-2)^{2n-2}-(x-2)^{2n-3}+\cdots+1\right]+\left[(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-3}+\cdots+1\right]\}}_{Q(x)} \end{aligned}$$

د قوس دننه قيمت، خارج قسمت دی.

66 ځواب)

$$\begin{aligned} x^4+9 &= (x^4+6x^2+9)-6x^2 \\ &= (x^2+3)^2-6x^2 \\ &= (x^2+x\sqrt{6}+3)(x^2-x\sqrt{6}+3) \end{aligned}$$
$$\begin{cases} x^2+ax+b \equiv x^2+x\sqrt{6}+3 \Rightarrow a=\sqrt{6}\ , b=3 \\ x^2+ax+b \equiv x^2-x\sqrt{6}+3 \Rightarrow a=-\sqrt{6}\ , b=3 \end{cases}$$

67 ځواب)

$$(x-2)^2=x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$$

لومړۍ طريقه:

$x=2$ مضاعف جذر دی، په کلي حالتونو کې د تقسيم عمليه په مستقمه توګه ترسره کوو:

$$\begin{array}{l|l} x^3+ax^2+bx+2 & x^2-4x+4 \\ \hline \vdots & x+n \\ \overline{R=0} & \end{array}$$

$$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-4x+4)(x+n)+0 \Rightarrow x^3+ax^2+bx+2=x^3-4x^2+4x+nx^2-4xn+4n$$

$$\Rightarrow x^3+ax^2+bx+2=x^3+x^2(n-4)+(-4n+4)x+an$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n=2 \\ b=-4n+4 \\ a=n-4 \end{cases} \Bigg\rangle n=\frac{1}{2}\ ,\ b=2\ ,\ a=-\frac{7}{2}$$

دویمه طریقه:

$p(x)$ د x^2 د توانونو له جنسه منظم کوو او وروسته په ترتیب د x^2 پرځای $(4x-4)$ خطي افاده اچوو.

$$\begin{cases} p(x)=x^3+ax^2+bx+2 => P(x)=x(x^2)+a(x^2)+bx+2 \\ (x-2)^2=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x^2=4x-4 \end{cases}$$

$$p(x^2=4x-4)=R=0 \Rightarrow x(4x-4)+a(4x-4)+bx+2=0$$

$$\Rightarrow 4x^2-4x+4ax-4a+bx+2=0$$

$$\Rightarrow 4(4x-4)-4x+4ax-4a+bx+2=0$$

$$\Rightarrow 16x-16-4x+4ax-4a+bx+2=0$$

$$\Rightarrow 12x+4ax+bx-14-4a=0$$

$$\Rightarrow x(12+4a+b)+(-14-4a)=0 \Rightarrow \begin{cases} -14-4a=0 \Rightarrow a=-\frac{7}{2} \\ 12+4a+b=0 \Rightarrow 12+4\left(-\frac{7}{2}\right)+b=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

68 ځواب)

لومړۍ طریقه:

$x^2+x+1=0$ افاده حقیقي جذر نلري او $\Delta<0$ دی، په کلي حالت کې د تقسیم عملیه په مستقیمه توګه ترسره کوو:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+(2m+n)x^3+6x^2-4mx+n-2 & x^2+x+1 \\ \hline \mp 2x^4 \mp 2x^3 \mp 2x^2 & 2x^2+ax+b \\ \overline{(2m+n-2)x^3+4x^2} & \\ \vdots & \\ \overline{0} & \end{array}$$

$$2x^4+(2m+n)x^3+6x^2-4mx+n-2=(x^2+x+1)(2x^2+ax+b)+0$$

$$2x^4+(2m+n)x^3+6x^2-4mx+n-2=2x^4+ax^3+bx^2+2x^3+ax^2+bx+2x^2+ax+b$$
$$2x^4+(2m+n)x^3+6x^2-4mx+n-2=2x^4+(a+2)x^3+(a+b+2)x^2+(a+b)x+b$$

$$\left.\begin{cases}2m+n=a+2 & (\mathrm{I})\\ a+b+2=6 & (\mathrm{II})\ \Rightarrow a+b=4\\ a+b=-4m & (\mathrm{III})\ \Rightarrow a+b=-4m\\ b=n-2 & (\mathrm{IIII})\end{cases}\right\rangle 4=-4m \Rightarrow m=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{IIII}),(\mathrm{II})\Rightarrow a+(n-2)+2=6\Rightarrow a+n=6\\ \xrightarrow[m=-1]{(\mathrm{I})}2(-1)+n=a+2\Rightarrow -2+n=a+2\Rightarrow a-n=-4\end{array}\right\rangle a=1\ ,\ n=5$$

پام مو وي، چې په دغه مسئله کې مجبور شوي یو څو دوه نور aاو b پارمترونه هم ترلاسه کړو چې د مسئلې جز نه دي.

دويمه طريقه:

$$x^2+x+1=0\Rightarrow x^2=-x-1\ ,\ \Delta<0$$

$p(x)$ د x^2 توانونو له جنسه منظم کوو او وروسته د x^2 پرځای $(-x-1)$ خطي افاده وضع کوو:

$$p(x)=2(x^2)^2+(2m+n)x(x^2)+6(x^2)-4mx+n-2$$

$$\begin{aligned}R=\ p(x^2=-x-1)=0&\Rightarrow 2(-x-1)^2+(2m+n)x(-x-1)+6(-x-1)-4mx+n-2=0\\ &\Rightarrow 2(x^2+2x+1)+(2m+n)(-x^2-x)+6(-x-1)-4mx+n-2=0\\ &\Rightarrow 2[(-x-1)+2x+1]+(2m+n)[-(-x-1)-x]-6x-6-4mx+n-2=0\\ &\Rightarrow 2(x)+(2m+n)(1)-6x-8-4mx+n=0\\ &\Rightarrow 2x+2m+n-6x-8-4mx+n=0\\ &\Rightarrow -4x+2m+2n-8-4mx=0\\ &\Rightarrow x(-4-4m)+(2m+2n-8)=0\\ &\Rightarrow\begin{cases}-4-4m=0\Rightarrow -4m=4\Rightarrow m=-1\\ 2m+2n-8=0\Rightarrow 2(-1)+2n-8=0\Rightarrow 2n=10\Rightarrow n=5\end{cases}\end{aligned}$$

دريیمه طريقه:

له مختلط جذرونو استفاده کوو:

$$x^2+x+1=0\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(1)=-3<0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

یو له جذرونو څخه مثلاً x_1 ټاکو او هغه J نوموو، ددې لپاره چې $p(x)$ پر x^2+x+1 د تقسیم

وړتیا ولري باید $p(J)=0$ وي.

لومړی J^2 او J^3 او J^4 محاسبه کوو:

$$J=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$
$$J^2=\left[\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left(1-2i\sqrt{3}-3\right)=\frac{1}{4}\left(-2-2i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$$
$$J^3=J^2\cdot J=\left[\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right]=1$$
$$J^4=J^3\cdot J=1\times J=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$$
$$p(J)=2J^4+(2m+n)J^3+6J^2-4mJ+n-2=0$$
$$\Rightarrow 2\left[\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right]+(2m+n)(1)+6\left[\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right]-4m\left[\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right]+n-2=0$$
$$\Rightarrow \left(-1+i\sqrt{3}\right)+2m+n+3\left(-1-i\sqrt{3}\right)-2m\left(-1+i\sqrt{3}\right)+n-2=0$$
$$\Rightarrow -1+i\sqrt{3}+2m+n-3-3i\sqrt{3}+2m-2mi\sqrt{3}+n-2=0$$
$$\Rightarrow (4m+2n-6)+i\left(-2\sqrt{3}-2m\sqrt{3}\right)=0$$

د دې لپاره چې مختلط عدد مساوي په صفر وي باید حقیقي او موهومي برخه مساوي په صفر وي:

$$\left\{\begin{array}{l}4m+2n-6=0\\ -2\sqrt{3}-2m\sqrt{3}=0\end{array}\right\rangle m=-1,\ n=5$$

څرنگه مو چې ولیدل، د m او n قیمتونو ترلاسه کولو لپاره یوازې د x^2+x+1 ترینوم یو مختلط جذر باید استفاده کړو. د دې خبرې دلیل دا دی چې که ax^2+bx+c دویمه درجه ترینوم د a او b او c حقیقي ضریبونو په درلودلو سره دوه مختلط جذرونه ولري، دغه دوه جذرونه حتمن د یوه او بل مزدوج دي. حتمن دغه دوه مختلط اعداد باید د یوه بل مزدوج وي.

69 ځواب)

$x=1$ ، $x^{2n}+x^n+1=3$, $x^2+x+1=3$ $p(x)$ پر x^2+x+1 د تقسیم وړ دي.

د $x\neq 1$ لپاره باید $(x-1)(x^{2n}+x^n+1)=x^{2n+1}-x^{2n}+x^{n+1}-x^n+x-1$ افاده پر $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$ د تقسیم وړ وي او بالعکس.

$$x^3-1=0\Rightarrow x^3=1$$
$$\underbrace{(x-1)p(x)}_{q(x)}=x^{2n+1}-x^{2n}+x^{n+1}-x^n+x-1 \qquad (\mathrm{I})$$

باید ووینو چې (I) افاده د n کومو قیمتونو ته مساوي په صفرکېږي (هغه مهال چې x^3 په I واړول شي).

1) د 3 مضرب وي یعنې $n=3k$ او $(k\in N)$ ، افاده په لاندې توگه کېږي:

$$q(x)=x^{2n+1}-x^{2n}+x^{n+1}-x^{n}+x-1\ ,\ \ n=3k$$
$$q(x)=x^{6k+1}-x^{6k}+x^{3k+1}-x^{3k}+x-1$$
$$q(x)=x(x^3)^{2k}-(x^3)^{2k}+x(x^3)^{k}-(x^3)^{k}+x-1$$

$$R=q(1)\Rightarrow R=x(1)^{2k}-(1)^{2k}+x(1)^{k}+x-1$$
$$\Rightarrow R=3x-1$$

چې د $x^3=1$ لپاره د $q(x)$ باقيمانده مساوي په $3x-1$ کېږي يعنې کله چې n د 3 مضرب وي، (I) افاده پر x^3-1 د تقسيم وړ نه ده.

2) که $n=3k+1$ وي، په دې حالت کې (I) لاندې شکل غوره کوي:

$$q(x)=x^{2(3k+1)+1}-x^{2(3k+1)}+x^{(3k+1)+1}-x^{(3k+1)}+x-1$$
$$q(x)=x^{6x+3}-x^{6k+2}+x^{3k+2}-x^{3k+1}+x-1$$
$$q(x)=(x^3)^{2k+1}-x^2(x^3)^{2k}+x^2(x^3)^{k}-x(x^3)^{k}+x-1$$
$$R=q(1)\Rightarrow R=(1)^{2k+1}-x^2(1)^{2k}+x^2(1)^{k}-x(1)^{k}+x-1$$
$$\Rightarrow R=0$$

په دې حالت کې (I) پر x^3-1 د تقسيم وړ ده.

3) په همدې توګه ثابتېږي چې په $n=3k+2$ حالت کې هم، باقيمانده صفر کېږي.

يوازې هغه حالت پاتې دی تر څو پر x^2+x+1 د $x^{2n}+x^n+1$ د تقسيم وړتيا وازميوو، ښکاره ده چې دغه تقسيم د هر $(n\in N)$ لپاره صدق کوي.

د دې لپاره چې $(n\in N)$ $x^{2n}+x^n+1$ پر x^2+x+1 د تقسيم وړ وي بايد n د 3 له مضرب څخه نه وي.

70 **ځواب)**

لومړی طريقه:

د دې لپاره چې يوه افاده پر بله افاده د تقسيم وړ وي، بايد دتقسيم باقيمانده له صفر سره متحد شي.

پر x^2-2x+4 د x^4-3x^3+ax+b تقسيم باقيمانده مساوي په $(a-8)x+b+24$ ده او لرو چې:

(تقسيم په مستقيم توګه ترسره کوو)

$$(a-8)x+(b+24)\equiv 0\Rightarrow a=8\ ,b=-24$$

دويمه طريقه: (د نامعيون ضريبونو طريقه)

$$x^4-3x^3+ax+b\equiv(x^2-2x+4)(x^2+mx+n)+0$$
$$x^4-3x^3+ax+b\equiv x^4+mx^3+nx^2-2x^3-2mx^2-2nx+4x^2+4mx+4n$$
$$x^4-3x^3+ax+b\equiv x^2+(m-2)x^3+(n-2m+4)x^2+(-2n+4m)x+4n$$

$$\left.\begin{cases} m-2=-3 \\ n-2m+4=0 \\ 4m-2n=a \\ 4n=b \end{cases}\right\rangle m=-1, n=-6, a=8\ , b=-24$$

د نامعینو ضریبونو په طریقه د تقسیم د وړتیا پر شرط سربېره، خارج قسمت هم ترلاسه کېدلی شي.

$$Q(x)=x^2-x-6$$

درېیمه طریقه:

د مقسوم علیه له موهومي جذرونو استفاده کوو:

$$x^2 - 2x4=0 \Rightarrow x=1\pm i\sqrt{3}$$

اړینه ده چې مقسوم علیه لا اقل یوه جذر ته مساوي په صفر شي، تر څو پر x^2-2x+4 دتقسیم وړتیا ترلاسه کړي ، مقسوم $f(x)$ نیسو:

$$f(x)=x^4-3x^3+ax+b$$

$$f(1+i\sqrt{3})=0 \Rightarrow (1+i\sqrt{3})^4-3(1+i\sqrt{3})^3+a(1+i\sqrt{3})+b=0$$

$$\Rightarrow (a+b+16)+\sqrt{3}(a-8)i=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} a+b+16=0 \\ a-8=0 \end{cases}\right\rangle \begin{cases} a=8 \\ b=-24 \end{cases}$$

71 **ځواب)**

$$\begin{array}{c|c} p(x) & (x-1) \\ \hline \vdots & \\ \hline R_1=4 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} p(x) & (x+2) \\ \hline \vdots & \\ \hline R_1=-5 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} p(x) & (x-1)(x-2) \\ \hline \vdots & q(x) \\ \hline R_1=mx+n & \end{array}$$

پر $x-1$ د $p(x)$ باقیمانده مساوي په 4 ده:

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ p(x)=(x-1)(x+2)q(x)+(mx+n) \end{cases}$$

$$p(1)=4 \Rightarrow m+n=4$$

پر $x+2$ د $p(x)$ باقیمانده مساوي په -5 ده:

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ p(x)=(x-1)(x+2)q(x)+(mx+n) \end{cases}$$

$$p(-2)=-5 \Rightarrow m+n=-5$$

$$\left.\begin{cases} m+n=4 \\ -2m+n=-5 \end{cases}\right\rangle \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$$

$$R = mx + n \Rightarrow R = 3x + 1$$

72 ځواب)

پر $(x^2-4)(x+1)$ د $f(x)$ تقسیم باقیمانده د مقسوم علیه درجې $m=3$ په پام کې نیولو سره $m-1=2$ درجه ده، یعنې:

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

د تقسیم قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$f(x) = (x^2-4)(x+1)Q(x) + (ax^2+bx+c) \Rightarrow f(x) = (x-2)(x+2)(x+1)Q(x) + (ax^2+bx+c)$$

پر $x+1$ د $f(x)$ باقیمانده مساوي په 1 دی:

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ f(x) = (x-2)(x+2)(x+1)Q(x) + (ax^2+bx+c) \end{cases}$$

$$f(-1)=1 \Rightarrow a-b+c=1$$

پر $2-$ د $f(x)$ باقیمانده مساوي په $3-$ ده:

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ f(x) = (x-2)(x+2)(x+1)Q(x) + (ax^2+bx+c) \end{cases}$$

$$f(2) = -3 \Rightarrow 4a-2b+c=-3$$

پر $x-2$ د $f(x)$ باقیمانده مساوي په $3-$ ده.

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=-2 \\ f(x) = (x-2)(x+2)(x+1)Q(x) + (ax^2+bx+c) \end{cases}$$

$$f(-2) = 2 \Rightarrow 4a-2b+c=2$$

پر $x+2$ د $f(x)$ باقیمانده مساوي په 2 ده:

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ f(x) = (x-2)(x+2)(x+1)Q(x) + (ax^2+bx+c) \end{cases}$$

$$f(-2) = 2 \Rightarrow 4a-2b+c=2$$

$$\left.\begin{cases} a-b+c=1 \\ 4a+2b+c=-3 \\ 4a-2ab+c=2 \end{cases}\right\rangle a=-\frac{1}{12},\ b=-\frac{5}{4},\ c=-\frac{1}{6}$$

$$R(x) = ax^2+bx+c = R(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{6}$$

73 **ځواب)**

پر $(2x+5)(x-1)(x-2)$ پولينوم د $f(x)$ له تقسيم څخه هغه باقيمانده ترلاسه کېږي چې د x له جنسه دويمه درجه وي.

$$(m-1=3-1=2)$$

که $R(x)=ax^2+bx+c$ باقيمانده او $Q(x)$ خارج قسمت فرض کړو د تقسيم قضيې په پام کې نيولو سره:

$$f(x)=(2x+5)(x-1)(x-2)Q(x)+(ax^2+bx+c)$$

$f(x)-3$ پر $x-1$ د تقسيم وړ دی:

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

$$f(1)-3=0\Rightarrow f(1)=3$$

$$\Rightarrow a+b+c=3$$

$f(x)-3$ پر $2x+5$ د تقسيم وړ دی:

$$2x+5=0\Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right)-3=0\Rightarrow f\left(-\frac{5}{2}\right)=3$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}a-\frac{5}{2}b+c=3$$

پر $x-2$ د $f(x)$ باقيمانده مساوي په 21 ده:

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

$$f(2)=21\Rightarrow 4a+2b+c=21$$

$$\left.\begin{cases}a+b+c=3\\ \frac{25}{4}a-\frac{5}{2}b+c=3\\ 4a+2b+c=21\end{cases}\right\rangle a=4\ ,\ b=6\ ,c=-7$$

$$R(x)=ax^2+bx+c=R(x)=4x^2+6x-7$$

74 **ځواب)**

$$f(x)=(2x+5)(x-1)(x-2)Q(x)+(4x^2+6x-7)$$

پر $2x+5$ د $f(x)$ باقيمانده:

$$2x+5=0\Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right)=R_1\Rightarrow R_1=4\left(-\frac{5}{2}\right)^2+6\left(-\frac{5}{2}\right)-7$$

$$\Rightarrow R_1 = 3$$

پر $x-1$ د $f(x)$ باقيمانده:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$f(1)=R_2 \Rightarrow R_2 = 4(1)^2+6(1)-7$$
$$\Rightarrow R_2 = 3$$

پر $x-2$ د $f(x)$ باقيمانده:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$f(2)=R_3 \Rightarrow R_3 = 4(2)^2+6(2)-7$$
$$\Rightarrow R_3 = 21$$

75 ځواب)

$f(x)$ پر $x+2$ د تقسيم وړ دی:

$$f(x)=4x^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$
$$f(-2)=0 \Rightarrow a(-2)^4+b(-2)^3+c(-2)^2+d(-2)+e=0$$
$$\Rightarrow 16a-8b+4c-2d+e=0$$

د $f(x)$ دعددي ضريبونو مجموعه 15 ده (د يوه مولټي نوم د ضريبونو مجموعه د $x=1$ لپاره ترلاسه کړئ):

$$f(1)=15 \Rightarrow a(1)^4+b(1)^3+c(1)^2+d(1)+e=15$$
$$\Rightarrow a+b+c+d+e=15$$

پر $(x+1)$ او $(x+3)$ او $(x-2)$ د $f(x)$ باقيمانده په ترتيب 5 او 13− او 92 ده:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$
$$f(-1)=5 \Rightarrow a(-1)^4+b(-1)^3+c(-1)^2+d(-1)+e=5$$
$$\Rightarrow a-b+c-d+e=5$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$
$$f(-3)=-13 \Rightarrow a(-3)^4+b(-3)^3+c(-3)^2+d(-3)+e=-13$$
$$\Rightarrow 81a-27b+9c-3d+e=-13$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$f(2)=92 \Rightarrow a(2)^4+b(2)^3+c(2)^2+d(2)+e=92$$
$$\Rightarrow 16a+8b+4c+2d+e=92$$

$$\begin{cases}16a-8b+4c-2d+e=0\\ a+b+c+d+e=15\\ a-b+c-d+e=5\\ 81a-27b+9c-3d+e=-13\\ 16a+8b+4c+2d+e=92\end{cases}\Bigg\rangle a=1,b=6,c=7,d=-1,e=2$$

$$f(x)=x^4+6x^3+7x^2-x+2$$

76 **ځواب)**

پر $x-\alpha$ د $f(x)$ باقيمانده مساوي په β ده:

$$x-a=0\Rightarrow x=a$$
$$p(\alpha)=\beta\Rightarrow\alpha^3-22\alpha-19=\beta$$

پر $x-\beta$ د $f(x)$ باقيمانده مساوي په α ده:

$$x-\beta=0\Rightarrow x=\beta$$
$$p(\beta)=\alpha\Rightarrow\beta^3-22\beta-19=\alpha$$

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\alpha^3-22\alpha-19=\beta\\ \beta^3-22\beta-19=\alpha\end{cases}$$

په (I) سیستم کې دوې رابطې له یوې بلې څخه کموو:

$$\alpha^3-22\alpha-19(\beta^3-22\beta-19)=\beta-\alpha\Rightarrow\alpha^3-22\alpha-19-\beta^3+22\beta+19=\beta-\alpha$$
$$\Rightarrow(\alpha^3-\beta^3)-22(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-22(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta\text{-}\beta^2-22+1)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta\neq0\\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-21=0\Rightarrow\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=21\qquad(\mathrm{II})\end{cases}$$

په (I) سیستم کې لرو چې:

$$\begin{matrix}\beta\\-\alpha\end{matrix}\quad\begin{cases}\alpha^3-22\alpha-19=\beta\\ \beta^3-22\beta-19=\alpha\end{cases}\Bigg\rangle\begin{cases}\alpha^3\beta-22\alpha\beta-19\beta=\beta^2\\ -\alpha\beta^2-22\alpha\beta-19\alpha=\alpha^2\end{cases}$$

پاسني دوه مساوات له یوه بل سره جمع کوو:

$$\alpha^3\beta-\alpha\beta^3+19(\alpha-\beta)=\beta^2-\alpha^2\Rightarrow\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)+19(\alpha-\beta)+(\alpha^2-\beta^2)=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-\beta)[\alpha\beta(\alpha+\beta)+19+(\alpha+\beta)]=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta\neq0\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)+19+(\alpha+\beta)=0\Rightarrow\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=-19\Rightarrow(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)=-19\quad(\mathrm{III})\end{cases}$$

$$(\mathrm{II}),(\mathrm{III}):\begin{cases}(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)=-19\\ \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=21\end{cases}\Bigg\rangle\begin{cases}(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)=-19\\ (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=21\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha\beta=-\left(\dfrac{19}{\alpha+\beta}+1\right)\\ \alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-21\end{cases}\Bigg\rangle(\alpha+\beta)^2+\frac{19}{\alpha+\beta}=20\Rightarrow(\alpha+\beta)^3-20(\alpha+\beta)+19=0$$

د $(\alpha+\beta)$ له جنسه پاسنۍ دریمه درجه معادله کې، د ضریبونو مجموعه صفر ده او یو جذر یې حتمن مساوي په یو دی، یعنې $\alpha+\beta=1$ ، دوه نور ځوابونه هم ترلاسه کېدلی شي، د $(\alpha+\beta)$ په درلودلو سره د لومړۍ معادلې په مرسته $\alpha\beta$ سیستم هم محاسبه کېدلی شي:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\cdot\beta=-20\end{cases}\Bigg\rangle\ a=5\quad,\quad\beta=-4$$

77 ځواب)

$$\begin{array}{c|l} p_3(x) & (x-1)(x-2)(x-3)\\ \cline{2-2} \vdots & \qquad k\\ \hline 6 & \end{array}$$

1) پر یادو دریو افادو د $p(x)$ باقیمانده 6 ده، نو د ضرب پر اړونده حاصل یې هم د $p(x)$ باقیمانده 6 کېږي.

2) $n=3$ او $m=3$ ، نو خارج قسمت ازاد عدد دی.

$$p_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)k+6$$

$p_3(x)$ پر $x+1$ د تقسیم وړتیا لري:

$$\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\ p_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)k+6\end{cases}$$

$$\begin{aligned}p(-1)=0&\Rightarrow(-1-1)(-1-2)(-1-3)k+6=0\\ &\Rightarrow(-2)(-3)(-4)k+6=0\\ &\Rightarrow-24k+6=0\\ &\Rightarrow k=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$p_3(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-3)+6$$

78 ځواب)

$$\begin{array}{c|l} p(x) & x^2+2x+4\\ \cline{2-2} \vdots & \\ \hline R_1(x)=x & \end{array}\qquad\begin{array}{c|l} g(x) & x^2+2x+4\\ \cline{2-2} \vdots & \\ \hline R_2(x)=3x-1 & \end{array}\qquad\begin{array}{c|l} p(x)g(x) & x^2+2x+4\\ \cline{2-2} \vdots & \\ \hline R=? & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}R_1(x)=x\\R_2(x)=3x-1\end{array}\right\rangle R_1(x)\times R_2(x)=x(3x-1)=3x^2-x$$

$$\begin{array}{l|l}R_1(x)\times R_2(x) & x^2+2x+4\\ \hline \vdots & \\ \overline{R} & \end{array} = \begin{array}{l|l}p(x)\times g(x) & x^2+2x+4\\ \hline \vdots & \\ \overline{R} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}3x^2-x & x^2+2x+4\\ \cline{2-2} \mp 3x^2\mp 6x\mp 12 & 3\\ \hline -7x-12 & \end{array}$$

$R=-7x-12$

79 ځواب)

$$\left.\begin{array}{l}R_1(x)=x\\R_2(x)=x+5\end{array}\right\rangle R_1(x)\times R_2(x)=x(x+5)=x^2+5x$$

$$\begin{array}{l|l}x^2+5x & x^2+4x+5\\ \cline{2-2} \mp x^2\mp 4x\mp 5 & 1\\ \hline x-5 & \end{array}$$

$=R=x-5$

80 ځواب)

$$\left.\begin{array}{l}R_1(x)=4\\R_2(x)=-3\end{array}\right\rangle R_1(x)\times R_2(x)=-12$$

څرنګه چې د R_1R_2 درجه د $(2x+7)$ مقسوم علیه له درجې څخه وړوکې ده، پر دې اساس باقیمانده هماغه $R=R_1R_2=-12$ دی.

81 ځواب)

$$A(x)=q_1(x)(ax^2+bx+c)+(kx+s)$$
$$B(x=)q_2(x)(ax^2+bx+c)+(mx+n)$$
$$A(x)\cdot B(x)=q_3(x)(ax^2+bx+c)+R(x) \qquad (\mathrm{I})$$
$$A(x)\cdot B(x)=\left[q_1(x)(ax^2+bx+c)+(kx+s)\right]\left[q_2(x)(ax^2+bx+c)+(mx+n)\right]$$
$$A(x)\cdot B(x)=q_1(x)q_2(x)(ax^2+bx+c)^2+\left[(mx+n)q_1(x)+(kx+s)q_2(x)\right](ax^2+bx+c)+(kx+s)(mx+n)$$
$$A(x)\cdot B(x)=\left[q_1(x)q_2(x)(ax^2+bx+c)+(mx+n)q_1(x)+(kx+s)q_2(x)\right](ax^2+bx+c)+(kx+s)(mx+n)$$
$$A(x)\cdot B(x)=q_3(x)(ax^2+bx+c)+(kx+s)(mx+n) \qquad (\mathrm{II})$$
$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II})\Rightarrow R(x)=(kx+s)(mx+n)$$

څرنګه چې د هر تقسیم باقیمانده له مقسوم علیه څخه یوه درجه وړوکی دی، پر دې اساس باقیمانده، پر ax^2+bx+c د $R(x)$ له نهايي تقسیم څخه ترلاسه کېږي، په پایله کې $A(x)\cdot B(x)$ پر ax^2+bx+c د $A(x)\cdot B(x)$ باقیمانده مساوي ده پر ax^2+bx+c د $R(x)=(kx+s)(mx+n)$ له باقیمانده سره:

82 **ځواب)**

$$p(x)\ \underline{\big|\ x^2+1}\qquad\qquad p(x)\ \underline{\big|\ x^3+1}$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots$$
$$\overline{R_1}\qquad\qquad\qquad\qquad\overline{R_2}$$

$$R_1\times R_2\equiv 2x^2-22x+10$$

پر x^2+1 د $p(x)$ باقیمانده مساوي په R_1 ده:

$$\begin{cases}x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\\ p(x)=a(x^2)^2+b(x^2)x+c\end{cases}$$
$$p(-1)=R_1\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)x+c=R_1$$
$$\Rightarrow a-bx+c=R_1$$
$$\Rightarrow R_1=a+c-bx$$

پر x^3+1 د $p(x)$ باقیمانده مساوي په R_2 ده:

$$\begin{cases}x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1\\ p(x)=a(x^3)x+b(x^3)+c\end{cases}$$
$$p(-1)=R_2\Rightarrow a(-1)+b(-1)+c=R_2$$
$$\Rightarrow R_2=-ax-b+c$$
$$R_1R_2=2x^2-22x+10\Rightarrow(a+c-bx)(-ax-b+c)\equiv 2x^2-22x+10$$
$$\Rightarrow -a^2x-ab+ac-acx-bc+c^2+abx^2+b^2x-bcx\equiv 2x^2-22x+10$$
$$\Rightarrow abx^2+x(-a^2-ac+b^2-bc)+(ac-ab-bc+c^2)\equiv 2x^2-22x+10$$
$$\begin{cases}ab=2\\ -a^2-ac+b^2-bc=-22\\ ac-ab-bc+c^2=10\end{cases}$$

له پاسني سیستم څخه c,b,a محاسبه کېدلی شي.

83 **ځواب)**

اړینه ده چې پر x^2-x+1 د $(x-1)(x+1)$ باقیمانده ترلاسه کړو.

$$x^2-x+1=0\Rightarrow x^2=x-1$$
$$p(x)=(x-1)(x+1)=x^2-1$$

$$R = p\left(x^2 = x-1\right) \Rightarrow R = (x-1)-1$$
$$\Rightarrow R = x-2$$

84 ځواب)

د $f(x)$ باقیمانده پر x^2+1 :

$$\begin{cases} x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \\ f(x)=ax^4+bx^3+c \Rightarrow f(x)=a\left(x^2\right)^2+bx\left(x^2\right)+c \end{cases}$$
$$R_1 = f\left(x^2=-1\right) \Rightarrow R_1 = a(-1)^2+bx(-1)+c$$
$$\Rightarrow R_1 = a-bx+c$$

د $f(x)$ باقیمانده پر x^3+1 :

$$\begin{cases} x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \\ f(x)=ax^4+bx^3+c \Rightarrow f(x)=ax\left(x^3\right)+b\left(x^3\right)+c \end{cases}$$
$$R_2 = f(-1) \Rightarrow R_2 = ax(-1)+b(-1)+c$$
$$\Rightarrow R_2 = -ax-b+c$$
$$R_1 \times R_2 = 2x^2-12x+10 \Rightarrow (a-bx+c)\times(-ax-b+c) \equiv 2x^2-12x+10$$
$$\Rightarrow -a^2x-ab+ac+abx^2+b^2x-bcx-acx-bc+c^2 \equiv 2x^2-12x+10$$
$$\Rightarrow abx^2+\left(-a^2+b^2-bc-ac\right)x+\left(-ab+ac-bc+c^2\right) \equiv 2x^2-12x+10$$
$$\begin{cases} ab=2 \\ -a^2+b^2-bc-ac=-12 \\ -ab+ac-bc+c^2=10 \end{cases}$$

د پاسني سیستم له حل وروسته c,b,a قیمتونه ترلاسه کېدلی شي.

85 ځواب)

د دې په پام کې نیولو سره چې $n=2$ دی، باید $p(x)$ او $p'(x)$ پر $x+2$ د تقسیم وړتیا ولري.

$p(x)$ پر $x+2$ د تقسیم وړتیا لري:

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ p(x)=x^3+3x^2-4 \end{cases}$$
$$p(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4=p(-2)=0 \quad \text{(I)}$$

$p'(x)$ پر $x+2$ د تقسیم وړتیا لري:

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ p'(x)=3x^2+6x \end{cases}$$
$$p'(-2)=3(-2)^2+6(-2)=p'(-2)=0 \qquad \text{(II)}$$
$$\text{(I)},\text{(II)} \Rightarrow p(-2)=p'(-2)=0$$

86 ځواب)

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

شرط : $p(-1)=p'(-1)=p^{n}(-1)=0$

$p(x)=x^4+ax^2+bx+c$

$p(-1)=0 \Rightarrow (-1)^4+a(-1)^2+b(-1)+c=0$

$\Rightarrow a-b+c=-1$

$p'(x)=4x^3+2ax+b$

$p'(-1)=0 \Rightarrow 4(-1)^3+2a(-1)+b=0$

$\Rightarrow -4-2a+b=0$

$\Rightarrow b-2a=4$

$p^{n}(x)=12x^2+2a$

$p^{n}(-1)=0 \Rightarrow 12(-1)^2+2a=0$

$\Rightarrow a=-6$

87 ځواب)

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

شرط : $p(-1)=p'(-1)=p^{n}(-1)=0$

$p(x)=x^4+ax^2+bx+c$

$p(-1)=0 \Rightarrow (-1)^4+a(-1)^2+b(-1)+c=0$

$\Rightarrow a-b+c=-1$

$p'(x)=4x^3+2ax+b$

$p'(-1)=0 \Rightarrow 4(-1)^3+2a(-1)+b=0$

$\Rightarrow -2a+b=4$

$p^{n}(x)=12x^2+2a$

$p^{n}(-1)=0 \Rightarrow 12(-1)^2+2a=0 \Rightarrow 12+2a=0$

$$\left\{\begin{array}{l} a-b+c=-1 \\ -2a+b=4 \\ 12+2a=0 \end{array}\right\rangle a=-6, b=-8, c=-3$$

$p(x)=x^4-6x^2-8x-3$

88 ځواب)

$p(x)$ پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړتیا لري:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

شرط : $p(1)=p'(1)=0$

$$p(x)=x^3+px^2+qx+r$$
$$p(1)=0\Rightarrow(1)^3+p(1)^2+q(1)+r=0$$
$$\Rightarrow p+q+r=-1$$
$$p'(x)=3x^2+2px+q$$
$$p'(1)=0\Rightarrow 3(1)^2+2p(1)+q=0$$
$$\Rightarrow 2p+q=-3$$

$p(x)$ پر $x+2$ د تقسیم وړتیا لري:

$$x+2=0\Rightarrow x=-2$$
$$p(-2)=0\Rightarrow(-2)^3+p(-2)^2+q(-2)+r=0$$
$$\Rightarrow 4p-2q+r=8$$
$$\begin{cases}p+q+r=-1\\2p+q=-3\\4p-2q+r=8\end{cases}\Bigg\rangle\begin{cases}p=0\\q=-3\\r=2\end{cases}$$

89 ځواب)

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$
شرط : $p(1)=p'(1)=0$

که پاسنی شرط صدق وکړي، $p(x)$ تل پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړتیا لري:

$$p(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n+1$$
$$p(1)=n(1)^{n-1}-(n+1)(1)^n+1\Rightarrow p(1)=n-n-1+1=0$$
$$\Rightarrow p(1)=0 \qquad (\mathrm{I})$$
$$p'(x)=n(n-1)x^{n-2}-n(n+1)x^{n-1}$$
$$p'(1)=n(n-1)(1)^{n-2}-n(n+1)(1)^{n-1}\Rightarrow p'(1)=n^2-n-n^2-n$$
$$\Rightarrow p'(1)=-2n$$
$$\Rightarrow p'(1)\neq 0$$
$p(1)=0$ و $p'(1)=-2n\neq 0$

$p(x)$ تل پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړتیا لري.

90 ځواب)

که $f(x)=0$ یو مضاعف جذر ولري او دغه مضاعف جذر m ونوموو، په دې صورت کې $f(x)$ پر $(x-m)^2$ د تقسیم وړتیا لري.

$$x-m=0$$
شرط : $f(m)=f'(m)=0$

$$f(x)=x^3-2x^2+x+a$$

$$f(m)=0\Rightarrow m^3-2m^2+m+a$$
$$f'(x)=3x^2-4x+1$$
$$f'(m)=0\Rightarrow 3m^2-4m+1=0\Rightarrow m=1, m=\frac{1}{3}$$

که $m=1$ د معادلې ګډ جذر او اړونده مشتق يې وي، په $f(x)$ معادله کې صدق کوي:

$$f(1)=0\Rightarrow (1)^3-2(1)^2+(1)+a=0$$
$$\Rightarrow 1-2+1+a=0$$
$$\Rightarrow a=0$$
$$if \quad a=0\Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+x=0$$

$f(x)$ مضاعف جذر يعنې $x=1$ لري.

د $f(x)=0$ د جذرونو محاسبې لپاره لرو چې:

$$f(x)=0\Rightarrow x^3-2x^2+x=0$$
$$\Rightarrow x(x^2-2x+1)=0$$
$$\Rightarrow x(x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow x=0, x=1$$

که $m=\frac{1}{3}$ د معادلې ګډ جذر او اړونده مشتق يې وي، په $f(x)$ معادله کې صدق کوي:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)+a=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+a=0$$
$$\Rightarrow a=-\frac{4}{27}$$
$$if \quad a=-\frac{4}{27}\Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+x-\frac{4}{27}=0$$
$$\Rightarrow f(x)=27x^3-54x^2+27x-4=0\Rightarrow x_1=x_2=\frac{1}{3}, x_3=\frac{4}{3}$$

91 **ځواب)**

لومړی طریقه:

شاید پام مو شي چې پر $(x+1)^2$، $(x-1)^2$ د $f(x)$ د تقسيم لپاره بايد لاندې شرطونه صدق وکړي:

$$f(1)=f'(1)=f(-1)=f'(-1)=0$$

البته د دغه معمولي طريقې په مرسته پايله ترلاسه کولی شو:

دويمه طريقه:

$$(x-1)^2(x+1)^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$$

$$f(x)=(x^4-2x^2+1)k+0$$

دوو ټکو ته پام وکړئ:

لومړی) د خارج قسمت درجه صفر ده او خارج قسمت يو k ته ورته عدد دی.

دويم) څرنگه چې $f(x)$ پر x^4-2x^2+1 د تقسيم وړتيا لري نو $R=0$ دی.

$$\frac{1}{5}x^4+ax^3+bx^2+cx+d\equiv kx^4-2kx^2+k\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{5}\\a=0\\b=-2k\Rightarrow b=-\frac{2}{5}\\c=0\\d=k\Rightarrow d=\frac{1}{5}\end{cases}$$

92 ځواب)

$f(x)$ پر $(x-1)^2$ د تقسيم وړتيا لري:

$$f(1)=f'(1)=0$$

$f(x)-3$ پر $x-2$ د تقسيم وړتيا لري:

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$
$$f(2)-3=0\Rightarrow f(2)=3$$

پر $(x-1)^2(x-2)$ د $f(x)$ باقيمانده، د مقسوم عليه د درجې په پام کې نيولو سره، دويمه درجه ده او د تقسيم قضيې پر اساس لرو چې:

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+(ax^2+bx+c)$$
$$f(1)=0\Rightarrow a+b+c=0$$
$$f(2)=0\Rightarrow 4a+2b+c=3$$
$$f'(x)=\left[2(x-1)(x-2)Q(x)+(x-1)^2Q(x)+Q'(x)(x-1)^2(x-2)\right]+(2ax+b)$$
$$f'(x)=(x-1)\left[2(x-2)Q(x)+(x-1)Q(x)+Q'(x)(x-1)(x-2)\right]+(2ax+b)$$
$$f'(x)=(x-1)Q_1(x)+2ax+b$$
$$f'(1)=0\Rightarrow 2a+b=0$$

$$\left.\begin{cases}a+b+c=0\\4a+2b+c=3\\2a+b=0\end{cases}\right\rangle a=3,b=-6,c=3\Rightarrow R(x)=ax^2+bx+c=3x^2-6x+3$$

93 ځواب)

پـر $(x-1)^4$ د $p_7(x)$ پولینـوم باقیمانـده مسـاوي پـه -1 ده. کـولی شـو داسـې یـې بیـان کـړو چـې $p_7(x)+1$ پر $(x-1)^4$ د تقسیم وړتیا لري.

یعنې $p_7(x)+1$ پر $(x-1)^4$ د تقسیم وړتیا لري.

$$if \quad p_7(1)=-1 \Rightarrow p_7(1)+1=0$$

پـر $(x+1)^4$ د $p_7(x)$ پولینـوم باقیمانـده مسـاوي پـه 1 ده. کـولی شـو داسـې یـې بیـان کـړو چـې $p_7(x)-1$ پر $(x+1)^4$ د تقسیم وړتیا لري.

یعنې $p_7(-1)-1$ پر $(x+1)^4$ د تقسیم وړتیا لري.

$$if \quad p_7(-1)=1 \Rightarrow p_7(-1)-1=0$$

پر دې اساس (د دې په پام کې نیولو سره چې مشتق ثابت قیمت (صفر) لري، $p'(x)$ پر $(x-1)^3$ او پر $(x+1)^3$ د تقسیم وړتیا لري.

$$(x-1)^3(x+1)^3=(x^2-1)^3=x^6-3x^4+3x^2-1$$

یادونه:

که $p(x)$ پر $(x-a)^n$ د تقسیم وړتیا ولري، $p'(x)$ پر $(x-a)^{n-1}$ د تقسیم وړتیا لري.

$p(x)$ اوومـه درجـه او $p'(x)$ شـپږمه درجـه دي، د a د ثابـت والي پـه فرضـولو سره بایـد ولـرو چـې: (لومړنی تابع نیسو)

$$p'(x)=a(x^6-3a^4+3x^2-1) \Rightarrow p(x)=a\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+c$$

(c ثابت قیمت دی)

$$\left.\begin{cases} p(1)=-1 \Rightarrow a\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}+1-1\right)+c=-1 \Rightarrow -16x+35c=-35 \\ p(-1)=1 \Rightarrow a\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}-1+1\right)+c=1 \Rightarrow 16a+35c=35 \end{cases}\right\rangle c=0 \;,\quad a=\frac{35}{16}$$

$$p(x)=\frac{35}{16}\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)$$

94 ځواب)

یادونه: که $f(x)$ پر $(x-a)^n$ د تقسـیم وړتیـا ولـري، پـه دې صـورت کـې یـې مشـتق یعنـې $f'(x)$ پـر $(x-a)^{n-1}$ د تقسیم وړتیا لري.

له دې ټکي کولی شو پایله ترلاسه کړو چې:

$f(x)=\lambda(x-a)^n$ پولینوم (چې λ ثابت قیمت لري) پرخپل مشتق یعنې:

$$f'(x)=\lambda n(x-a)^{n-1}$$

د تقسیم وړتیا لري.

پاسنی مثال د پورتنۍ قضیې معکوس دی:

یعنې که n درجه لرونکی $f(x)$ پر خپل اړوند مشتق، یعنې $f'(x)$ د تقسیم وړتیا ولري، نو باید $f(x)$ په $\lambda(x-a)^n$ توګه وي، په دې صورت کې قضیه په خپل کامل صورت بیان کېدلی شي:

(ددې لپاره اړین شرط چې $f(x)$ درجه n او پرخپل مشتق د تقسیم وړ وي، دا دی چې $\lambda(x-a)^n$ وي:

$$f(x)=\lambda(x-a)^n=\lambda(x-a)\underbrace{(x-b)(x-c)\cdots(x-L)}_{g(x)},\lambda\in R,a=b=c=\cdots=L$$

$$f(x)=\lambda(x-a)g(x)$$
$$f(x)=\lambda g(x)+\lambda(x-a)g'(x)$$

باید $f'(x)$ پر $g(x)$ د تقسیم وړتیا ولري، په پایله کې باید $(x-a)g'(x)$ پر $g(x)$ د تقسیم وړتیا ولري.

د $g'(x)$، $n-2$ درجه او د $g(x)$ درجه $n-1$ ده، یعنې یوازې هغه مهال $(x-a)g'(x)$ پر $g(x)$ د تقسیم وړتیا لري چې $(x-a)$ د $g(x)$ مقسوم علیه وي، یعنې a باید له یوه b او c او ..... اعدادو سره مساوي وي .

فرضوو چې $a=b$، وي په دې صورت کې:

$$f(x)=\lambda(x-a)^2(x-c)\cdots(x-L),a=c=\cdots L$$
$$f(x)=\lambda(x-a)(x-a)\cdots(x-a)\ f(x)=\lambda(x-a)^n$$

2) $f(x)$ پر $x-1$ د تقسیم وړتیا لري:

$$f(1)=0\Rightarrow\lambda(1-a)^n=0\Rightarrow(1-a)^n=0\Rightarrow a=1\Rightarrow\lambda=(-1)^n$$
$$f(x)=(-1)^n(x-1)^n$$

3) $f(0)=1\Rightarrow\lambda(0-a)^n=1\Rightarrow-\lambda a^n=1$

95 ځواب)

$f(x)+2$ پر $(x-1)^3$ د تقسیم وړتیا لري، نو $f'(x)$ هم پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړتیا لري.

$f(x)-4$ پر $(x+1)^3$ د تقسیم وړتیا لري، نو $f'(x)$ هم پر $(x+1)^2$ تقسیم وړتیا لري.

پر دې اساس $f'(x)$ د $(x-1)^2(x+1)^2$ د ضرب پر حاصل د تقسیم وړتیا لري.

($f'(x)$ څلورمه درجه ده او مقسوم علیه هم څلورمه درجه دی، پر دې اساس، خارج قسمت یو عدد دی)

$$f'(x)=(x-1)^2(x+1)^2m \qquad (m \text{ خارج قسمت دی})$$

$$f'(x)=m(x^2-1)^2=m(x^4-2x^2+1)$$

m ثابت عدد دی، که د هغه لومړنۍ تابع ونیسو، نو لرو:

$$f(x)=m\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+c$$

$$\left.\begin{cases} f(1)+2=0 \\ f(-1)-4=0 \end{cases}\right\rangle \left.\begin{cases} f(1)=-2 \Rightarrow m\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+c=-2 \\ f(-1)=4 \Rightarrow m\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)+c=4 \end{cases}\right\rangle c=1, m=-\frac{45}{8}$$

$$f(x)=-\frac{45}{8}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+1$$

96 **ځواب)**

د دې لپاره چې $f(x)=0$ دوه مساوي جذرونه ولري باید له $f'(x)$ سره يو ګډ جذر ولري:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-18x+6=0 \Rightarrow x=1, \frac{1}{2}$$

د دوو $f(x)=0$ او $f'(x)=0$ معادلو ګډ جذر کولی شي يو له 1 يا $\frac{1}{2}$ اعدادو څخه وي.

1) ګډ جذر $x=1$ نيسو، دغه جذر بايد په $f(x)=0$ معادله کې صدق وکړي:

$$f(1)=4-9+6+a=0 \Rightarrow a=-1$$

که $a=-1$ په $f(x)=0$ کې وضع کړو، نو $4x^3-9x^2+6x-1=0$ معادله ترلاسه کېږي چې دوه مساوي جذرونه يعنې 1 لري.

(يو مضاعف جذر چې مساوي په $x=1$ دی، لري)

$$4x^3-9x^2+6x-1=0 \Rightarrow (x-1)^2(4x-1)=0 \Rightarrow x_1=x_2=1, x_3=\frac{1}{4}$$

2) په همدې توګه ګډ جذر $x=\frac{1}{2}$ نيسو ، دغه جذر په $f(x)=0$ معادله کې صدق کوي .

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}\right)^3-9\left(\frac{1}{2}\right)^2+6\left(\frac{1}{2}\right)+a=0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{8}-\frac{9}{4}+\frac{6}{2}+a=0$$

$$\Rightarrow a=-\frac{5}{4}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow 4x^3-9x^2+6x-\frac{5}{4}=0$$

$$\Rightarrow 16x^3-36x^2+24x-5=0$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2(4x-5)=0 \Rightarrow x_1=x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{5}{4}$$

97 ځواب)

$$f'(x)=0+1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$f(x)=f'(x)+\frac{x^n}{n!}$$

که $x=\alpha$ د $f(x)$ معادلې جذر او له یوه څخه لوړه درجه ولري (لږ تر لږه دویمه درجه وي) نو:

$$f(\alpha)=f'(\alpha)+\frac{\alpha^n}{n!}\xrightarrow{f(\alpha)=f'(\alpha)=0}\frac{\alpha^n}{n!}=0\Rightarrow\alpha^n=0\Rightarrow\alpha=0$$

α له صفر سره مساوي کېدلی نشي، ځکه $\alpha=0$ د $f(x)$ معادلې جذر نه دی، پر دې اساس، جذر له یوه څخه لوړه درجه نلري او یو ساده جذر دی.

98 ځواب)

1) $f(x)$ پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړ دی:

$$f(1)=f'(1)=0$$

$$f'(x)=nx^{n-1}+a(n-1)x^{n-2}$$

$$\left.\begin{cases}f(1)=1+a+b=0\\ f'(1)=n+(n-1)a=0\end{cases}\right\rangle a=-\frac{n}{n-1}\ ,\ \ b=\frac{1}{n-1}$$

د دې لپاره چې $f(x)$ پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړ وي باید $f(x)$ په لاندې توګه وي:

$$f(x)=x^n-\frac{n}{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{n-1}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[(n-1)x^n-nx^{n-1}+1\right]$$

2) د قوس دننه افادې $f(x)$ قیمت مساوي په $\alpha(x)$ فرضوو او لرو چې:

$$\alpha(x)=(n-1)x^n-nx^{n-1}+1$$

$$=\left(nx^n-nx^{n-1}\right)-\left(x^n-1\right)$$

$$=nx^{n-1}(x-1)-\left[(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)\right]$$

$$=(x-1)\left[nx^{n-1}-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)\right]$$

$$=(x-1)\left[\left(x^{n-1}-x^{n-2}\right)+\left(x^{n-1}-x^{n-3}\right)+\cdots+x\left(x^{n-21}-x\right)+\left(x^{n-1}-1\right)\right]$$

$$=(x-1)\left[x^{n-2}(x-1)+x^{n-3}\left(x^2-1\right)+\cdots+\left(x^{n-1}-x\right)+\left(x^{n-1}-1\right)\right]$$

$$=(x-1)^2\left[x^{n-2}+x^{n-3}(x+1)+x^{n-4}\left(x^2+x+1\right)+\cdots+x\left(x^{n-3}+x^{n-4}+\cdots+1\right)+\left(x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1\right)\right]$$

$$=(x-1)^2\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+(n-3)x^{n-4}+\cdots+2x+1\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{n-1}(x-1)^2\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+(n-3)x^{n-4}+\cdots+2x+1\right]$$

پر $(x-1)^2$ د $f(x)$ خارج قسمت مساوي دی په:

$$Q(x)=\frac{1}{n-1}\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\cdots+2x+1\right]$$

99 ځواب)

$$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=0$$

$$\begin{cases} f(x)=x^{2a}+mx^{a+1}+nx^{a}+px^{a-1}+q \\ f(1)=0\Rightarrow 1+m+n+p+q=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x)=2ax^{2a-1}+m(a+1)x^{a}+nax^{a-1}+p(a-1)x^{a-2} \\ f'(1)=0\Rightarrow 2a+m(a+1)+ma+p(a-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x)=2a(2a-1)x^{2a-2}+m(a+1)ax^{a-1}+na(a-1)x^{a-2}+p(a-1)(a-2)x^{a-3} \\ f''(1)=0\Rightarrow 2a(2a-1)+ma(a+1)+na(a-1)+p(a-1)(a-2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'''(x)=2a(2a-1)(2a-2)x^{2a-3}+m(a+1)a(a-1)x^{a-2}+na(a-1)(a-2)x^{a-3}+p(a-1)(a-2)(a-3)x^{a-4} \\ f'''(1)=0\Rightarrow 2a(2a-1)(2a-2)+m(a+1)a(a-1)+na(a-1)(a-2)+p(a-1)(a-2)(a-3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+m+n+p+q=0 \\ 2a+m(a+1)+na+p(a-1)=0 \\ 2a(2a-1)+ma(a+1)+na(a-1)+p(a-1)(a-2)=0 \\ 2a(2a-1)(2a-2)+m(a+1)a(a-1)+na(a-1)(a-2)+p(a-1)(a-2)(a-3)=0 \end{cases}$$

$$q=1\ ,\ n=2(a^2-1)\ ,\ m=p=-a^2$$

100 ځواب)

$$(a-1)(a^{23}+a^{22}+\cdots+a+1)=a^{24}-1$$
$$(a-1)(a^{x-1}+a^{x-2}+\cdots+a+1)=a^{x}-1$$

$a^{24}-1$ پر x^x-1 د تقسيم وړتيا لري:

$$\begin{cases} p(x)=a^{24}-1 \\ a^{x}-1=0\Rightarrow a^{x}=1 \end{cases}$$

د مقسوم او مقسوم عليه پولينومونه داسې ليکلی شو:

$$\frac{a^{24}-1}{a-1},\ \frac{a^{x}-1}{a-1}$$

فرضوو چې $24=px+q$ وي، چې دلته p خارج قسمت دی او، 24 پر x او q د دغه تقسيم باقيمانده وي $(o\le q<x)$ په دې صورت کې:

$$a^{24}-1=a^{px+q}-1$$

$$= a^{px} \cdot a^{q} - 1$$
$$= a^{p} \cdot \left(a^{x}\right)^{p} - 1$$
$$= a^{p} \cdot \left(a^{x}\right)^{p} - 1 - a^{q} + a^{q}$$
$$= a^{q}\left[\left(a^{x}\right)^{p} - 1\right] + \left(a^{q} - 1\right)$$

$p(x)$ پر $a^{x} - 1$ د تقسيم وړتيا لري، يعنې:

$$R = a^{q} - 1 = 0 \Rightarrow a^{q} = 1 \Rightarrow q = 0$$

يعنې بايد $q = 0$ او x د 24 مقسوم عليه وي، نو x له لاندې اعدادو څخه دی:

1,2,3,4,6,8,12,24

101 **ځواب)**

د مسئلې د شرط مطابق بايد ولرو چې:

$$f(x+1) = (x-1)^2 \varphi(x),\ f(x-1) = (x+1)^2 \varphi_1(x)$$

که په لومړۍ رابطه کې x پر $x-1$ او پر دويمه رابطه کې پر $x-1$ تقسيم کړو نو وبه لرو چې:

$$f(x) = (x-2)^2 \varphi(x-1) = (x-2)^2 g(x)$$
$$f(x) = (x+2)^2 \varphi_1(x+1) = (x+2)^2 g_1(x)$$

پر دې اساس $f(x)$ پر $(x-2)^2$ او $(x+2)^2$ او په نهايت کې د ضرب پر حاصل يې يعنې $(x^2-4)^2$ د تقسيم وړتيا لري او لرو چې:

$$f(x) = \lambda\left(x^2 - 4\right)^2$$

او څرنګه چې $f(x)$ څلورمه درجه دی، λ (خارج قسمت) ثابت قيمت لري او د تعريف مطابق يې فرضوو:

$$f(1) = 1 \Rightarrow \lambda(1-4)^2 = 1 \Rightarrow \lambda\frac{1}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{9}\left(x^2 - 4\right)^2$$

102 **ځواب)**

څرنګه چې $f(x,y)$ نسبت y,x ته متناظر دي، نو لرو چې : $f(x,y) = f(y,x)$

له بله پلوه څرنګه چې $f(x,y)$ پر $x-y$ د تقسيم وړتيا لري، کولی شو وليکو:

$$\left.\begin{matrix} f(x,y) = (x-y)\varphi(x,y) \\ f(y,x) = (y-x)\varphi(y,x) \end{matrix}\right\rangle \varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$$

يعنې $\varphi(x,y)$ هم پر $x-y$ او په پايله کې $f(x,y)$ پر $(x-y)^2$ د تقسيم وړتيا لري.

103 **ځواب)**

$$5^{2n} - 1 = \left(5^2\right)^n - 1$$
$$= 25^n - 1^n$$

$$= (25-1)\underbrace{\left(25^{n-1} + 25^{n-2} \times 1 + \cdots + 2^{n-1}\right)}_{k}$$
$$= 24k$$

ځرنګه چې $24k$ پر 24 د تقسیم وړتیا لري، نو $5^{2n} - 1$ هم پر 24 د تقسیم وړتیا لري :

ځواب) 104

$$N = 5^{2n-1} \times 2^{n+1} + 3^{n+1} \times 2^{2n-1} \Rightarrow 10N = 10 \times 5^{2n-1} \times 2^{n+1} + 10 \times 3^{n+1} \times 2^{2n-1}$$
$$= 10 \times \frac{25^n}{5} \times 2^n \times 2 + 10 \times 3^n \times 3 \times \frac{4^n}{2}$$
$$= \left(4x \times 25^n \times 2^n\right) + \left(15 \times 3^n \times 4^n\right)$$
$$= 4x \times 50^n + 15 \times 12x^n$$
$$= 4x \times 50^n + (19-4) \times 12^n$$
$$= \left(4x \times 50^n - 4 \times 12^n\right) + 19 \times 12^n$$
$$= 4\left(50^n - 12^n\right) + 19 \times 12^n$$
$$= 4\left[(50-12)\left(50^{n-1} + \cdots + 12^{n-1}\right)\right] + 19 \times 12^n$$
$$= 38 \times \underbrace{4\left(50^{n-1} + \cdots + 12^{n-1}\right)}_{k_1} + 19 \times \underbrace{12^n}_{k_2}$$
$$= 38k_1 + 19k_2$$
$$= 19(2k_1 + k_2)$$
$$= 19k$$

ځرنګه چې 10 او 19 نسبت یوه بل ته لومړي دي نو N پر 19 د تقسیم وړتیا لري.

ځواب) 105

$$if \quad y = 1 \Rightarrow x^1 - 2^z = 1$$
$$\Rightarrow x - 1 + 2^z$$
$$if \quad y \neq 1 \Rightarrow x^y - 2^z = 1$$
$$\Rightarrow x^y - 1 = 2^z$$
$$\Rightarrow (x-1)\left(x^{y-1} + x^{y-2} + \cdots + x + 1\right) = 2^z$$

د کیڼ لوري هر یوه قوس قیمت باید د 2 له توانونو څخه وي.

په لومړي قوس کې د مساواتو په کیڼ لوری کې:

$x - 1 = 2^t \Rightarrow x = 2^{t+1}$ $\qquad$ x تاق عدد

په دویم قوس کې د مساواتو په کیڼ لوری کې:

په دویم قوس کې د حدونو شمېر مساو په y دی او ځرنګه چې، د دغه قوس هر حد تاق عدد دی، نو باید شمېر یې جفت وي یعنې $y = 2m$

$$x^{2m} - 2^z = 1 \Rightarrow x^{2m} - 1 = 2^z$$

که $m=1$ وي، یعنې $2^z, x^2-1=2^z$ پر x^2-1 یعنې پر $x-1$ او $x+1$ د تقسیم وړتیا ولري او دا هغه مهال ممکن دی چې هم $x-1$ او هم $x+1$ د 2 له توان څخه وي، چې یوازې د $x=3$ لپاره ممکن ده، اوس باید m داسې ترلاسه کړو ترڅو ولرو:

$$3^{2m}-1=2^z \Rightarrow (3^m-1)(3^m+1)=2^z$$

$$\begin{aligned} if \quad m=1 &\Rightarrow (2)(4)=2^z \\ &\Rightarrow 2^3=2^z \\ &\Rightarrow z=3 \end{aligned}$$

د $m=1$ ، په پام کې نیولو سره، $y=2m=2$ دی.

$$\begin{cases} y=1 \Rightarrow z\in N, x=1+2^z \\ x=3, y=2, z=3 \end{cases}$$

ځواب) 106

$$p(x)=x^4-16$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$
$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\begin{aligned} R=p(2) &\Rightarrow R=(2)^4-16 \\ &\Rightarrow R=0 \end{aligned}$$

x^4-16 پر $x-2$ د تقسیم وړتیا لري.

$$\begin{aligned} R=p(-2) &\Rightarrow R=(-2)^4-16 \\ &\Rightarrow R=0 \end{aligned}$$

x^4-16 پر $x+2$ د تقسیم وړتیا لري.

ځواب) 107

$$\begin{aligned} 17^{2^n}-1 &= \left(17^2\right)^{2^{n-1}}-1 \\ &= (289)^{2^{n-1}}-1^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

د دې په پام کې نیولو سره چې 2^{n-1} جفت دی، پاسنی عدد پر $289+1=290$ د تقسیم وړتیا لري، پر دې اساس پر 29 د تقسیم وړتیا لري.

ځواب) 108

یادونه: $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$

په اسانۍ سره لیدل کېږي چې $(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$ افاده هغه مهال پر $(x+y)(y+z)(z+x)$ د تقسیم وړتیا لري چې m تاق عدد وي.

ځواب) 109

$$3^{4n+2}+1=3^{2(2n+1)+1}$$

$$= 9^{2n+1} + 1^{2n+1}$$
$$= (9+1)(9^{2n} - 9^{2n-1} + \cdots + 1^{2n})$$
$$= 10k$$

څرنګه چې $10k$ پر 10 د تقسیم وړتیا لري، نو 3^{4n+2} هم پر 10 د تقسیم وړتیا لري.

110 **ځواب)**

$$\begin{cases} x + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y^3 \\ p(x) = x^{15} + y^{45} = x^{15} + (y^3)^{15} \end{cases}$$
$$R = p(-y^3) \Rightarrow R = (-y^3)^{15} + (y^3)^{15}$$
$$\Rightarrow R = 0$$

$x^{15} + y^{45}$ افاده پر $x + y^3$ د تقسیم وړتیا لري، ځکه باقیمانده یې $R = 0$ شوې.

111 **ځواب)**

ثابتوو چې $S = 19^{19} + 69^{69}$ پر 4 او 11 د تقسیم وړتیا لري.

$$S = (20-1)^{19} + (68-1)^{69}$$
$$= (20^{19} - 19 \times 20^{18} + \cdots - 1) + (68^{69} + 69 \times 68^{68} + \cdots + 1)$$
$$= [20(20^{18} - 19 \times 20^{17} + \cdots) - 1] + [68(68^{68} + 69 \times 68^{67} + \cdots) + 1]$$
$$= (20m_1 - 1) + (68n_1 + 1)$$
$$= 4(5m_1 + 17n_1)$$
$$S = (22-3)^{19} + (66+3)^{69}$$
$$= (22^{19} - 19 \times 22^{18} \times 3 + \cdots - 3^{19}) + (66^{69} + 69 \times 68^{68} \times 3 + \cdots + 3^{69})$$
$$= [22(22^{18} - 19 \times 22^{17} \times 3 + \cdots) - 3^{19}] + [66(66^{68} + 69 \times 66^{67} \times 3 + \cdots) + 3^{69}]$$
$$= (22m_2 - 3^{19}) + (66n_2 + 3^{69})$$
$$= (22m_2 + 66n_2) + (3^{69} - 3^{19})$$
$$= 11(2m_2 + 6n_2) + 3^{19}(3^{50} - 1)$$
$$= 11p + 3^{19}(243^{10} - 1)$$
$$= 11p + 3^{19}(243 - 1)(243^9 + \cdots + 1)$$
$$= 11p + 3^{19} \times 242(243^9 + \cdots + 1)$$
$$= 11[p + 3^{19} \times 22(243^9 + \cdots + 1)]$$
$$= 11q$$

څرنګه چې S هم پر 4 او هم پر 11 د تقسیم وړتیا لري، نو پر دې اساس پر 44 هم د تقسیم وړتیا لري.

112 ځواب)

$$\begin{cases} x-y^2=0 \Rightarrow x=y^2 \\ p(x)=x^7+y^{14} \Rightarrow p(x)=x^7+\left(y^2\right)^7 \end{cases}$$

$$p\left(y^2\right)=\left(y^2\right)^7+\left(y^2\right)^7 \Rightarrow p\left(y^2\right)=2y^{14}$$

$$\Rightarrow p\left(y^2\right)=R\neq 0$$

x^7+y^{14} افاده هېڅکله پر $x-y^2$ د تقسیم وړتیا نلري.

113 ځواب)

که ثبوت کړو چې $f(x)$ پر $(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)=x^5-1$ د تقسیم وړتیا لري، ثابتولی شو چې $f(x)$ هم پر $x^4+x^3+x^2+x+1$ د تقسیم وړتیا لري.

$f(x)$ پر x^5-1 د تقسیم ړتیا لري:

$$\begin{cases} x^5-1=0 \Rightarrow x^5=1 \\ f(x)=\left(x^5\right)^n\cdot x^4+\left(x^5\right)^m\cdot x^3+\left(x^5\right)^k\cdot x^2+\left(x^5\right)^r\cdot x+\left(x^5\right)^s \end{cases}$$

$$f(1)=0 \Rightarrow (1)^n\cdot x^4+(1)^m\cdot x^3+(1)^k\cdot x^2+(1)^r\cdot x+(1)^s=0$$

$$\Rightarrow x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

$$\Rightarrow R=0$$

114 ځواب)

د هندسي تصاعد د مجموعې فورمول په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1},\ g(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\left(x^{2n+2}-1\right)(x-1)}{\left(x^{n+1}-1\right)\left(x^2-1\right)}=\frac{\left(x^{n+1}-1\right)\left(x^{n+1}+1\right)(x-1)}{\left(x^{n+1}-1\right)(x-1)(x+1)}=\frac{x^{n+1}+1}{x+1}$$

$x^{n+1}+1$ پر $x+1$ د تقسیم وړتیا لري:

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ p(x)=x^{n+1}+1 \end{cases}$$

$$R=p(-1)=(-1)^{n+1}+1 \xrightarrow{n=2k} R=0$$

$n+1$ باید تاق عدد وي یعنې n باید جفت وي ترڅو $R=0$ شي.

115 ځواب)

$$p(x)=x^{2m}+x^m+1 \text{ و } g(x)=x^2+x+1$$

$$if\quad p(x)=x^{12m}+x^m+1 \Rightarrow (x-1)p(x)=(x-1)\left(x^{2m}+x^m+1\right)=h(x)$$

$$\Rightarrow h(x)=x^{2m+1}-x^{2m}+x^{m+1}-x^m+x-1$$

$$if\quad g(x)=x^2+x+1 \Rightarrow (x-1)g(x)=x^3-1$$

باید $h(x)$ پر x^3-1 د تقسیم وړتیا ولري.

د m لپاره درې حالتونه په پام کې نیسو:

$$\text{I)}\quad m=3k$$

$$h(x)=x^{6k+1}-x^{6k}+x^{3k+1}-x^{3k}+x-1$$

$$h(x)=\left(x^3\right)^{2k}\cdot x-\left(x^3\right)^{2k}+\left(x^3\right)^{k}\cdot x-\left(x^3\right)^{k}+x-1$$

$$x^3-1=0\Rightarrow x^3=1$$

$$h(1)=R\Rightarrow R=(1)^{2k}\cdot x-(1)^{2k}+(1)^{k}\cdot x-(1)^{k}+x-1$$

$$\Rightarrow R=x-1+x-1+x-1$$

$$\Rightarrow R=3x-3$$

$$\Rightarrow R=3(x-1)\neq 0$$

چې د منلو وړ نه دی ځکه $R\neq 0$ دی.

$$\left.\begin{cases}\text{II)}\quad m=3k+1\Rightarrow R=0\\ \text{III)}\quad m=3k-1\Rightarrow R=0\end{cases}\right\rangle m=3k\pm 1$$

116 **ځواب)**

$$f(x)=(4x-9)q(x)+5$$

$$f\left(x^2\right)=\left(4x^2-9\right)q\left(x^2\right)+5$$

$$f\left(x^2\right)=(2x+3)\underbrace{(2x-3)\cdot q\left(x^2\right)}_{Q(x)}+5$$

$$f\left(x^2\right)=(2x+3)Q(x)+5\Rightarrow R=5$$

په پایله کې پر $2x+3$ د $f\left(x^2\right)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په 5 ده.

117 **ځواب)**

$$f(x)=\left(x^2-4\right)q(x)+(3x+2)$$

$$f(x+1)=\left[(x+1)^2-4\right]q(x+1)+[3(x+1)+2]$$

$$f(x+1)=[(x+1)-2][(x+1)+2]q(x+1)+(3x+5)$$

$$f(x+1)=(x-1)(x+3)q(x+1)+(3x+5)$$

$$f(x+1)=(x-1)(x+3)q(x+1)+3(x-1)+8$$

څرنګه چې پر $x-1$ د $f(x+1)$ باقیمانده ثابت عدد دی، د باقیمانده درجه یو واحد ښکته کوو:

$$f(x+1)=(x-1)\underbrace{[(x+3)(x+1)+3]}_{Q(x)}+8$$

$$f(x+1)=(x-1)Q(x)+8\Rightarrow R=8$$

نو پر $x-1$ د $f(x+1)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په 8 ده.

118 **ځواب)**

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+5x$$
$$f(x^2+1)=\left[(x^2+1)^2-1\right]q(x^2+1)+5(x^2+1)$$
$$f(x^2+1)=(x^4+2x^2)q(x^2+1)+5(x^2+1)$$
$$f(x^2+1)=(x^2+2)x^2\cdot q(x^2+1)+5(x^2+2)-5$$
$$f(x^2+1)=(x^2+2)\underbrace{\left[x^2\cdot q(x^2+1)+5\right]}_{Q(x)}-5$$
$$f(x^2+1)=(x^2+2)Q(x)-5\Rightarrow R=-5$$

یعنې پر x^2+2 د $f(x^2+1)$ د تقسیم باقیمانده مساوي په -5 ده.

119 ځواب)

لومړی طریقه:

$$f(x)=(x-1)q(x)+5$$
$$f(x^2-3)=\left[(x^2-3)-1\right]q(x^2-3)+5$$
$$f(x^2-3)=(x^2-4)q(x^2-3)+5$$
$$f(x^2-3)=(x+2)(x-2)q(x^2-3)+5$$
$$f(x^2-3)=(x+2)\underbrace{\left[(x-2)q(x^2-3)\right]}_{Q(x)}+5$$
$$f(x^2-3)=(x+2)Q(x)+5$$

پر $x+2$ د (x^2-3) د تقسیم باقیمانده مساوي په 5 ده.

دویمه طریقه:

له فرضیې سره سم $f(1)=5$ دی، پر $x+2$ د $f(x^2-3)$ تقسیم باقیمانده د ټاکلو لپاره اړینه ده چې په دغه افاده کې $x=-2$ وضع کړو:

$$f(x^2-3)^{x=-2}=f\left[(-2)^2-3\right]=f(1)=5$$

120 **ځواب)**

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+2$$
$$f(x^3)=(x^6-1)q(x^3)+2$$
$$f(x^3)=(x^4+x^2+1)\underbrace{\left[(x^2-1)q(x^3)\right]}_{Q(x)}+2$$
$$f(x^3)=(x^4+x^2+1)Q(x)+2\Rightarrow R=2$$

121 ځواب)

کله چې $f(x)-2$ پر $(x+2)^2$ د تقسیم وړتیا ولرى، مشتق یې یعنې $f'(x)$ پر $(x+2)$ د تقسیم وړتیا لري.

په همدې توګه $f'(x)$ پر $x-2$ د تقسیم وړتیا لري.

څرنګه چې $x-2, x+2$ نسبت یوه بل ته لومړني دي پر دې اساس $f'(x)$ باید پر $(x+2)(x-2)$ یعنې x^2-4 د تقسیم وړتیا ولري.

له بل پلوه $f(x)$ دریمه درجه ده، پر دې اساس $f'(x)$ دویمه درجه ده، یعنې:

$$f'(x)=a(x^2-4) => F(x)=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]+b$$

$$\begin{cases} f(-2)-2=0 \\ f(2)+2=0 \end{cases} \Bigg\rangle \begin{cases} a\left(-\frac{8}{3}+8\right)+b-2=0 \\ a\left(\frac{8}{3}-8\right)+b+2=0 \end{cases}$$

$$b=0 \Rightarrow a=\frac{3}{8} \Rightarrow f(x)=f(x)=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=\frac{1}{8}\left(x^3-12x\right)$$

122 ځواب)

$f(x+1)$ پر $(x+2)^2$ د تقسیم وړتیا لري:

$$f(x+1)=(x+2)^2\cdot g(x) \qquad (\mathrm{I})$$

$f(x-2)$ پر $(x-4)^2$ د تقسیم وړتیا لري:

$$f(x-2)=(x-4)^2 g_1(x) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\begin{aligned} x \to x-1 \xrightarrow{(\mathrm{I})} f(x) &= (x+1)^2 g(x-1) \\ &= (x+1)^2 a(x) \\ x \to x+2 \xrightarrow{(\mathrm{II})} f(x) &= (x-2)^2 g_1(x+2) \\ &= (x-2)^2 a_1(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ پر $(x+1)^2$ او پر $(x-2)^2$ د تقسیم وړتیا لري، نو $f(x)$ پر $(x-2)^2$ $(x+1)^2$ هم د تقسیم وړتیا لري.

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)^2\cdot\lambda \qquad (\lambda \text{ خارج قسمت دی})$$

$$\begin{aligned} if \quad f(3)=32 &\Rightarrow 16\lambda=32 \\ &\Rightarrow \lambda=2 \\ &\Rightarrow f(x)=2(x+1)^2(x-2)^2 \end{aligned}$$

۱۲۳ ځواب)

کله چې $f(x)+3$ پر $(x-1)^3$ د تقسیم وړتیا ولري، باید د $f(x)+3$ مشتق یعنې $f'(x)$ پر $(x-1)^2$ د تقسیم وړتیا ولري.

کله چې $f(x)-3$ پر $(x+1)^3$ د تقسیم وړتیا ولري، باید د $f(x)-3$ مشتق یعنې $f'(x)$ پر $(x+1)^2$ د تقسیم وړتیا ولري.

پر دې اساس باید $f'(x)$ د $(x-1)^2(x+1)^2$ د ضرب پر حاصل د تقسیم وړتیا ولري.

$$f'(x)=a\left[(x-1)^2(x+1)^2\right] \Rightarrow f'(x)=a(x^2-1)^2$$
$$\Rightarrow f'(x)=a(x^4-2x^2+1)$$

$f(x)$ پنځمه درجه ده، $f'(x)$ باید څلورمه درجه وي یعنې a ثابت عدد دی، نو د $f(x)$ لپاره لرو چې:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x^4-2x^2+1)dx=a\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+b$$

که $f(x)+3$ پر $(x-1)^3$ د تقسیم وړتیا ولري:

$$f(1)+3=0\left[a\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+b\right]+3=0$$

که $f(x)-3$ پر $(x+1)^3$ د تقسیم وړتیا ولري:

$$f(-1)-3=0\left[a\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)+b\right]-3=0$$

$$\begin{cases} a\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+b+3=0 \\ a\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)+b-3=0 \end{cases}$$

د دوو معادلو له مجموعې څخه $b=0$ او $a=-\frac{45}{8}$ کېدلی شي:

$$f(x)=-\frac{45}{8}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)=-\frac{45}{8\times 15}(3x^5-10x^3+15x)=-\frac{3}{8}(3x^5-10x^3+15x)$$

۱۲۴ ځواب)

$f(x)-1$ پر $(x+1)^4$ دتقسیم وړتیا لري، پر دې اساس د $f(x)-1$ مشتق یعنې $f'(x)$ پر $(x+1)^3$ د تقسیم وړتیا لري.

$f(x)+1$ پر $(x-1)^4$ د تقسیم وړتیا لري، پر دې اساس د $f(x)+1$ مشتق یعنې $f'(x)$ پر $(x-1)^3$ د تقسیم وړتیا لري.

پر دې اساس $f'(x)$ د $(x+1)^3$ $(x-1)^3$ د ضرب پر حاصل د تقسيم وړتيا لري.

(خارج قسمت يو عدد دی)

$$f'(x)=a\left[(x+1)^3(x-1)^3\right]=a\left(x^2-1\right)^3$$
$$f'(x)=a\left(x^6-3x^4+3x^2-1\right)$$

له دې ځايه چې $f(x)$ اوومه درجه ده، $f'(x)$ بايد شپږمه درجه وي، يعنې a ثابت عدد دی:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\left[a\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+\frac{3}{3}x^3-x\right)+b\right]$$

$f(x)-1$ پر $(x+1)^4$ د تقسيم وړتيا لري:

$$f(-1)-1=0\Rightarrow\left[a\left(\frac{1}{7}\right)(-1)^7-\frac{3}{5}(-1)^5+(-1)^3-(-1)+b\right]-1=0$$
$$\Rightarrow\left[a\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}-1+1\right)+b\right]-1=0$$

$f(x)+1$ پر $(x-1)^4$ د تقسيم وړتيا لري:

$$f(1)+1=0\Rightarrow\left[a\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}+1-1\right)+b\right]+1=0$$

له دوو پاسنيو رابطو څخه a او b محاسبه شوي او $f(x)$ په لاندې توګه محاسبه کېږي:

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(5x^7-21x^5+35x^3-35x\right)$$

125 **ځواب)**

$f(x)+2$ پر $(x-1)^3$ د تقسيم وړتيا لري، نو $f'(x)$ پر $(x-1)^2$ د تقسيم وړ دی.

$f(x)-4$ پر $(x+1)^3$ د تقسيم وړتيا لري، نو $f'(x)$ پر $(x+1)^2$ د تقسيم وړ دی.

$f'(x)$ د $(x+1)^2$ $(x-1)^2$ د ضرب پر حاصل د تقسيم وړتيا لري.

$f(x)$ پنځمه درجه ده، نو $f'(x)$ څلورمه درجه ده او خارج قسمت يو عدد دی.

$$f'(x)=m(x-1)^2(x+1)^2=m\left(x^4-2x^2+1\right)$$
$$f(x)=\int f'(x)dx=a\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+b$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)+2=0\Rightarrow\left[a\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+b\right]+2=0\Rightarrow\dfrac{8a}{15}+b=-2 \\ f(1)-4=0\Rightarrow\left[a\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)+b\right]-4=0\Rightarrow\dfrac{-8a}{15}+b=4 \end{array}\right\rangle b=1, a=-\frac{45}{8}$$

$$f(x)=\frac{-45}{8}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+1$$

ځواب) 126

که مقسوم علیه او مقسوم له $x-1$ سره ضرب کړو، فرض شوې مسئله به داسې وي:

$$(x-1)\left(x^{3a}+x^{3b+1}+x^{3c+2}\right)=x^{3a+1}+x^{3b+2}+x^{3c+3}-x^{3a}-x^{3b+1}-x^{3c+2}$$

$$(x-1)\left(x^2+x+1\right)=x^3-1$$

اوس ثابتوو چې د a او b او c ټولو قیمتونو لپاره $p(x)=x^{3a+1}+x^{3b+2}+x^{3c+3}-x^{3a}-x^{3b+1}-x^{3c+2}$ افاده پر x^3-1 د تقسیم وړتیا لري:

$$\begin{cases}x^3-1=0\Rightarrow x^3=1\\ p(x)=x\left(x^3\right)^a+x^2\left(x^3\right)^b+\left(x^3\right)^{c+1}-\left(x^3\right)^a-x\left(x^3\right)^b-x^2\left(x^3\right)^c\end{cases}$$

$$R=p(1)\Rightarrow R=x(1)^a+x^2(1)^b+(1)^{c+1}-(1)^a-x(1)^b-x^2(1)^c$$

$$\Rightarrow R=x+x^2+1-1-x-x^2$$

$$\Rightarrow R=0$$

ځواب) 127

$A_0=0$ او $A_1=24$ پر 24 د تقسیم وړتیا لري.

فرضوو چې A_n د 24 یو مضرب وي، ثابتوو چې A_{n+1} هم پر 24 د تقسیم وړتیا لري، د دې لپاره اړینه ده ثبوت کړو چې $A_{n+1}-A_n$ د 14 مضرب دی.

$$A_{n+1}-A_n=\left[(n+1)^4+6(n+1)^3+11(n+1)^2+6(n+1)\right]-\left(n^4+6n^3+11n^2+6n\right)$$

$$=\left(n^4+4n^3+6n^2+4n+1\right)+6\left(n^3+3n^2+3n+1\right)$$

$$+11\left(n^2+2n+1\right)+6n+6-n^4-6n^3-11n^2-11n^2-6n$$

$$=4n^3+24n^2+44n+24$$

$$=24\left(n^2+1\right)+4n\left(n^2+11\right)$$

د دې لپاره چې A_{n+1} پر 24 د تقسیم وړ وي، باید $4n\left(n^2+11\right)$ پر 24 یا $n\left(n^2+11\right)$ پر 6 د تقسیم وړتیا ولري.

$4n\left(n^2+11\right)$ جفت عدد دی (یا n جفت دی یا n^2+11)

که n د 3 مضرب نه وي، پر 3 د n^2 په تقسیم کې باقیمانده مساوي په 1 کېږي او دا په هغه صورت کې چې n^2+11 د 3 مضرب وي، نو $n\left(n^2+11\right)$ پر 3×2 یعنې 6 د تقسیم وړتیا لري.

ځواب) 128

$$p(1): n=1\Rightarrow p(x)=(x+1)+x^2=x^2+x+1$$

د $n=1$ لپاره صدق کوي، په دې حالت کې $p(x)$ پر x^2+x+1 د تقسیم وړتیا لري.

د استقراء فرض : $p(k): n=k\Rightarrow p(x)=(x+1)^{2k-1}+x^{k+1}$

د استقراء حکم : $p(k+1): n=k+1 \Rightarrow p(x)=(x+1)^{2k+1}+x^{k+2}$

$$\begin{aligned}(x+1)^{2k+1}+x^{k+2} &= (x+1)^2(x+1)^{2k-1}+xx^{k+1}=(x^2+2x+1)(x+1)^{2k-1}+xx^{k+1}\\ &=\left[(x^2+x+1)+x\right](x+1)^{2k-1}+x\cdot x^{k+1}\\ &=\left[(x^2+x+1)(x+1)^{2k-1}+x(x+1)^{2k-1}\right]xx^{k-1}\\ &=(x^2+x+1)(x+1)^{2k-1}+x\left[(x+1)^{2k-1}+x^{k+1}\right]\end{aligned}$$

لومړۍ برخه x^2+x+1 عامل لري او دويمه برخه د استقرا فرض پر اساس صدق کوي، نو د $k+1$ لپاره هم صدق کوي.

ځواب) 129

$$\begin{aligned}x^3-x^2+x-1 &= x^2(x-1)+(x-1)\\ &=(x-1)(x^2+1)\end{aligned}$$

څرنګه چې $x-1$ او x^2+1 نسبت يوه بل ته لومړني دي، که $f(x)$ پر هر يوه يې د تقسيم وړتيا ولري، په دې صورت کې يې د ضرب پر حاصل هم د تقسيم وړتيا لري.

$$\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ f(x)=x^5+x^3-x^2-1\end{cases}$$

$$f(1)=(1)^5+(1)^3-(1)^2-1\Rightarrow f(1)=0$$

$f(x)$ پر $x-1$ د تقسيم وړتيا لري.

$$\begin{cases}x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\\ f(x)=x(x^2)^2+x(x^2)-(x^2)-1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f(-1)=x(-1)^2+x(-1)-(-1)-1 &\Rightarrow f(-1)=x-x+1-1\\ &\Rightarrow f(-1)=0\end{aligned}$$

$f(x)$ پر x^2+1 د تقسيم وړتيا لري.

$f(x)$ پر $x^2+1, x-1$ د تقسيم وړتيا لري، نو د ضرب پر حاصل يې يعنې $(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1$ هم د تقسيم وړتيا لري.

ځواب) 130

$f(x)$ پر $x-1$ د تقسيم وړتيا لري:

$$\begin{aligned}&x-1=0\Rightarrow x=1\\ &f(1)=0\Rightarrow 1+a+b+c+d=0\end{aligned}$$

$f(x)$ پر x^2+1 د تقسيم وړتيا لري:

$$\begin{cases}x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\\ f(x)=(x^2)^2+ax(x^2)+b(x^2)+cx+d\end{cases}$$

$$f(-1)=0 \Rightarrow (-1)^2+ax(-1)+b(-1)+cx+d=0$$
$$\Rightarrow -ax+cx+1-b+d=0$$
$$\Rightarrow x(c-a)+1-b+d=0 \Rightarrow \begin{cases} c-a=0 \Rightarrow a=c \\ 1-b+d=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} a+c \\ 1-b+d=0 \\ 1+a+b+c+d=0 \end{cases}\right\rangle b=-a, c=a, d=-a-1$$

$$f(x)=x^4+ax^3-ax^2+ax-a-1$$

د a هر د خوښې وړ قیمت لپاره، $f(x)$ پر $(x-1)(x^2+1)$ د تقسیم وړتیا لري.

البته کولی شو a ترلاسه کړو:

$$1+a+b+c+d=0 \Rightarrow 1+a+(-a)+(a)+(-a-1)=0$$
$$\Rightarrow 1+a-a+a-a-1=0$$
$$\Rightarrow 0=0$$
$$\Rightarrow a\in R$$

ځواب) 131

که β,α د معادلې جذرونه وي په دې صورت کې $\alpha\beta=-4, \alpha+\beta=-2$ کېږي.

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (یادونه)

$$\frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{\alpha^4+\beta^4+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2}{\alpha+\beta}$$
$$=\frac{\left[(s^2-2p)^2-2p^2\right]+p(s^2-2p)+p^2}{s}$$
$$=-4D$$

په فورمول کې د $s=\alpha+\beta=-2$ او $p=\alpha\beta=-4$ په وضع کولو سره، د $\dfrac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha^2-\beta^2}$ قیمت محاسبه کېدلی شي.

ځواب) 132

$$f(-1)=f'(-1)=f''(-1)=f'''(-1)=0$$
$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=12x^2+6ax+2b$$
$$f'''(x)=24x+6a \Rightarrow f'''(-1)=0$$
$$\Rightarrow -24+6a=0$$

$$\Rightarrow a = 4$$

133 ځواب)

$$(2k-1)(2k+1) = 323 \Rightarrow 4k^2 - 1 = 323 \qquad (2k-1)+(2k+1) = 4k$$
$$\Rightarrow 4k^2 = 324 \qquad = 4\times 9$$
$$\Rightarrow k^2 = 81 \qquad = 36$$
$$\Rightarrow k = 9$$

134 ځواب)

$$(2k-2)+2k+(2k+2) = 6k$$
$$(2k-2)(2k)(2k+2) = 8\underbrace{(k-1)k(k+1)}_{6k} = 48k'$$

د دريو متوالي اعدادو د ضرب حاصل تل پر 6 د تقسيم وړتيا لري.

يعنې د دريو مکعوس متوالي اعدادو د ضرب حاصل تل پر 48 د تقسيم وړتيا لري.

يادونه:

د هرو دوو صحيح متوالي اعدادو د ضرب حاصل پر 2 د تقسيم وړتيا لري او د هرو دريو صحيح متوالي اعدادو د ضرب حاصل پر $3,\cdots$ په همدې ترتيب د n صحيح متوالي اعدادو د ضرب حاصل تل پر n د تقسيم وړتيا لري.

135 ځواب)

د دريو متوالي اعدادو د ضرب حاصل هم پر 2 او هم پر 3 د تقسيم وړتيا لري، څرنګه چې 2 او 3 نسبت يوه بل ته لومړني دي نو د ضرب پر حاصل يې، يعنې 6 هم د تقسيم وړتيا لري.

يادونه: هر صحيح عدد کولی شو، د اړونده باقيمانده له جنسه يې، د صحيح عدد په توګه وليکو، مثلاً n صحيح عدد، کولی شو په لاندې شکلونو د m باقيمانده له جنسه يې وليکو:

$$n = mk, mk+1, mk+2, \cdots, mk+(m-1)$$

مثلاً هر صحيح عدد لاندې شکلونو $2k$ يا $2k-1$ ته ورته دی يا هر صحيح عدد يو له $3k+1$ يا $3k+2$ شکلونو څخه لري.

پر دې اساس د پاسنۍ برخې د ثبوتولو لپاره کولی شو له لاندې رابطو څخه ګټه پورته کړو، له دريو n او $n+1$ او $n+2$ اعدادو څخه لږ تر لږه يو يې پر 3 د تقسيم وړتيا لري، پايله دا چې هر صحيح عدد په يو له $4k$ او $4k+1$ او $4k+2$ او $4k+3$ شکلونو سره دی، چې $4k+1$ او $4k+3$ تاق دي يعنې هر تاق عدد کولی شو په $n = 4k+1$ او $n = 4k+3$ شکلونو وښيو، که دغه عدد د دوو په توان رفع کړو $n^2 = 8(2k^2+1)$ يا $n^2 = 8(2k^2+3k+1)$ يعنې $n^2 = 8k'+1$ يا $n^2 = 8k''+1$ کېږي، په پايله کې د هر تاق عدد مربع په $8t+1$ توګه ده چې t د خوښې وړ عدد دی.

136 ځواب)

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x^5 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^5 = 1$$
$$\Rightarrow x = 1$$

$$A = \frac{x^{100} + x^{-100}}{2x^{20} - x^{-5}} = \frac{(1)^{100} + (1)^{-100}}{2(1)^{20} - (1)^{-5}} = \frac{1+1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

ځواب) 137

$$(1+i)^n = (1-i)^n \Rightarrow \frac{(1-i)^n}{(1-i)^n} = 1$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$$
$$\Rightarrow \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\right]^n = 1$$
$$\Rightarrow \left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^n = 1$$
$$\Rightarrow i^n = 1$$
$$\Rightarrow n = 4k$$

یعنې کله چې n صحیح عدد او 4 مضرب وي، پاسنی مساوات سم دی.

ځواب) 138

د دې لپاره چې $f(x)$ پر $2x^2 - 2x + 5$ د تقسیم وړتیا ولري، باید د وروستۍ افادې د جذرونو لپاره، مساوي په صفر شي.

$$2x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3i}{2}$$

خو څرنګه چې د $f(x)$ ضریبونه حقیقي او د $f(x)$ معادلې ځوابونه د یوه بل معکوس دي، اړینه ده چې د یوه جذر لپاره مساوي په صفر شي، په دې صورت کې له شک پرته د دویم جذر لپاره هم مساوي په صفر کېږي.

ځواب) 139

$$R = f\left(\frac{1+3i}{2}\right) = 2\left(\frac{1+3i}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1+3i}{2}\right) + 5 = \frac{7-24i}{2} + \frac{-20+15i}{2} + \frac{3+9i}{2} + 5 = 0$$

د n ټولو قیمتونو ته $f(0) = 0$ او د n ټولو تاق قیمتونو ته، $f(-1) = 0$ دی، پر دې اساس $f(x)$ پر $x(x+1)$ د تقسیم وړتیا لري.

د دې لپاره چې ثبوت کړو $f(x)$ پر $x^2 + x + 1$ د تقسیم وړتیا لري، نو د دریو وروستیو حدونو جذرونه ترلاسه کوو:

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=j, j^2$$

پر دې اساس که $f(x)$ د يوه موهومي واحد لپاره مساوي په صفر شي، پر x^2+x+1 بـه د تقسيم وړتيا ولري:

$$f(j)=(j+1)^n-j^n-1$$

n هغه عدد دی چې پر 3 د تقسيم وړتيا نلري او پر دې اساس دوه حالتونه موجود دي:

$n=3k+1$ (I

$$f(j)=(j+1)^{3k+1}-j^{3k+1}-1$$
$$=(j+1)(j+1)^{3k}-j\cdot j^{3k}-1$$

د $j+1=-j^2$ او $j^{3k}=1$ رابطو او دا چې $3k$ جفت عدد دی (ځکه $n=3k+1$ تاق دی)، په پام کې نيولو سره به ولرو چې:

$$f(j)=(j+1)-j-1=0$$

$n=3k+2$ (II

$$f(j)=(j+1)^{3k+2}-j^{3k+2}-1$$
$$=(j+1)^2(j+1)^{3k}-j^2\cdot j^{3k}-1$$
$$=-(j+1)^2-j^2-1$$
$$=-(j+2j+1)-j^2-1$$
$$=-2j-2j^2-2$$
$$=-2(j^2+j+1)$$
$$=0$$

پر دې اساس $f(x)$ پر x^2+x+1 د تقسيم وړتيا لري.

140 **ځواب)**

لومړی) د n ټولو قيمتونو ته لرو چې: $f(0,y)=0, f(x,0)=0$ پر دې اساس $f(x,y)$ تـل پـر xy د تقسيم وړتيا لري، که n تاق عدد وي، لرو چې: $f(-y,y)$ پر دې اساس $f(x,y)$ د n د تـاق والي په صورت کې پر $x+y$ د تقسيم وړتيا لري. اوس بايد ثبوت کړو چې $f(x,y)$ پر x^2+xy+y^2 هـم د تقسيم وړ دی، اړينه ده چې $f(x,y)$ د $0=x^2+y\cdot x+y^2$ معادلې يوه موهومي جذر ته مساوي په صفر شي، ترڅو په دغه ترينوم د تقسيم وړتيا ولري، د دغه معـادلې جذرونـه نسـبت x مجهـول تـه ټاکو:

$$x^2+xy+y^2=0 \Rightarrow x=y\times\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=yj, yj^2$$

$f(yj,y)$ محاسبه کوو (j او j^2 د واحد موهومي مکعبونه دي)

$$f(yj,y)=(yj+y)^n-(yj)^n-y^n$$

$$= \left[y\left(j+1\right)^n\right] - y^n j^n - y^n$$
$$= y^8\left(j+1\right)^n - y^n j^n - y^n$$
$$= y^n\left[\left(j+1\right)^n - j^n - 1\right]$$

د $j^2+j+1=0$ رابطې په پام کې نيولو سره کولی شو د $j+1$ پرځای $-j^2$ وضع کړو او څرنگه چې n تاق عدد دی، نو لرو:

$$f\left(jy,y\right) = y^n\left[\left(-j\right)^n - j^n - 1\right]$$
$$= y^n\left(-j^{2n} - j^n - 1\right)$$
$$= -y^n\left(j^{2n} + j^n + 1\right)$$

دې ته په پام سره چې n پر 3 د تقسيم وړ نه دی، لاندې دوه حالتونه په پام کې نيسو:

$$1)n=3k+1 \Rightarrow f\left(jy,y\right) = -y^n\left(j^{6k+2}+j^{3k+1}+1\right) = -y^n\left(j^2+j+1\right)=0$$
$$2)n=3k+2 \Rightarrow f\left(jy,y\right) = -y^n\left(j^{6k+4}+j^{3k+2}+1\right) = -y^n\left(j+j^2+1\right)=0$$

په دې ترتيب $f\left(x,y\right)$ دمسئلې دشرطونو په پام کې نيولو سره پر x^2+xy+y^2 هم دتقسيم وړتيا لري.

دويم) په دې حالت کې n په $6k+1$ توگه دی، څرنگه چې n تاق عدد دی او پر 3 د تقسيم وړتيا نلري، پر دې اساس $f\left(x,y\right)$ پر $\left(x^2+xy+y^2\right)$ او $xy\left(x+y\right)$ د تقسيم وړ دی ، پر $\left(x^2+xy+y^2\right)^2$ د تقسيم وړتيا د ثبوتولو لپاره اړينه ده، ثبوت کړو چې نسبت x يا y ته اړونده مشتق يې هم پر x^2+xy+y^2 د تقسيم وړتيا لري، نو ليکو چې:

$$\alpha\left(x\right) = \left(x+y\right)^n - x^n - y^n \Rightarrow \alpha'\left(x\right) = n\left(x+y\right)^{n-1} - nx^{n-1}$$

د $x^2+xy+y^2=0$ له يوه جذر مثلاً jy څخه مشتق نيسو:

$$\alpha'\left(jy\right) = n\left(j\cdot y+y\right)^{n-1} - n\left(j\cdot y\right)^{n-1} \Rightarrow \alpha'\left(yj\right) = ny^{n-1}\left[\left(j+1\right)^{n-1} - j^{n-1}\right]$$

$n-1$ جفت عدد دی، نو:

$$\left(j+1\right)^{n-1} = \left(-j^2\right)^{n-1} = j^{2(n-1)}$$

او که د n پرځای $6k+1$ قيمت وضع کړو، وبه لرو چې:

$$\alpha'\left(jy\right) = ny^{n-1}\left(j^{12k} - j^{6k}\right) = 0$$

او په همدې توگه کله چې $\alpha\left(x\right)$ او $\alpha'\left(x\right)$ دواړه پر x^2+xy+y^2 د تقسيم وړ وي، $\alpha\left(x\right)$ به پر $\left(x^2+xy+y^2\right)^2$ د تقسيم وړتيا ولري:

$$1)\left(x+y\right)^3 - x^3 - y^3 = Axy\left(x+y\right)$$

څرنگه چې د مساواتو دواړه خواوې نظر x ته دويمه درجه دي، A ثابت قيمت لري، د x^2y ضريب په کيڼ لوري کې مساوي په 3 او په ښي خوا کې مساوي په A دی، نو $A=3$ ، يعنې:

$$\left(x+y\right)^3 - x^3 - y^3 = 3xy\left(x+y\right)$$
$$2)\left(x+y\right)^5 - x^5 - y^5 = Bxy\left(x+y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

5 تاق عدد دی چې پر 3 د تقسیم وړتیا نلري، مثلاً مخکې حالت کې $B=5$ کېږي:

$$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

په همدې توګه:

$$(x-y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

ځواب) 141

که د موآور رابطې په اړه معلومات ولرو یعنې $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ کـولی شـو په مقسوم کې د مقسوم علیه یوه موهومي جذر په وضع کولو سره، صفر باقیمانده ترلاسه کړو:

$$x^2-2x\cos\alpha+1=0\Rightarrow x=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$$

مثلاً $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$ جذر ازمویو، په ترتیب ترلاسه کېږي چې:

$$R=f(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n+!}\cdot\cos\alpha(n-1)\alpha-(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\cos n\alpha-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cos\alpha+1$$

$$=[\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha]\cos(n-1)\alpha-(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\cos n\alpha-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cos\alpha+1$$

$$=\cos(n+1)\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha-\cos^2 n\alpha-i\sin n\alpha\cdot\cos n\alpha-\cos^2\alpha+i\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1$$

$$=[\cos(n+1)\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos^2 n\alpha-\cos^2\alpha+1]+i[\sin(n+1)\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha-\sin n\alpha\cdot\cos n\alpha-\sin\alpha\cos\alpha]$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\cos 2n\alpha+\cos 2\alpha)-\frac{1}{2}(1+\cos 2n\alpha)-\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)+1\right]+i\left[\frac{1}{2}(\sin 2n\alpha+\sin 2\alpha)-\frac{1}{2}\sin 2n\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]$$

$$=0$$

کله چې په حقیقي ضریب لرونکې معادلـه کـې $(a+ib)$ تـه ورتـه مخـتلط جـذر صـدق وکـړي، حـتماً معکوس یې یعنې $(a-ib)$ هم په معادله کې صدق کوي، پر دې اساس د $x=\cos\alpha-i\sin\alpha$ جـذر ازمویل اړین نه دي.

ځواب) 142

لومړی) مقسوم علیه کولی شو په لاندې توګه تجزیه کړو:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)$$

پر دې اساس اړینه ده تر څو مقسوم علیه د $x=-jy-j^2z$ لپاره مساوي په صـفر شي، چـې پـه دېـره اسانۍ متحقق کېدلی شي.

دویم) سربېره پر $f(x,y,z)$ ، اړونده مشتق یې هم باید نسبت د x همدې قیمت ته مساوي پـه صـفر شي.

درېیم)

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

$$(x-y)^7+(y-z)^7+(z-x)^7=7(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)^2$$

ځواب) 143

$$p(x)=x^{n+1}\sin(n-1)\varphi-x^n\sin n\varphi+x\sin\varphi$$

$$x^2-2x\cos\varphi+1=0 \Rightarrow x=\cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

اړينه ده چې يو له پاسنيو جذرونو څخه مثلاً $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$ مقسوم مساوي په صفر کړي:

$$p(\cos\varphi+i\sin\varphi)=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n+1}\cdot\sin(n-1)\varphi-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n\sin n\varphi+(\cos\varphi+i\sin\varphi)\sin\varphi$$

د موآور رابطه (يادونه : $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$

$$p(\cos\varphi+i\sin\varphi)=[\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi]\sin(n-1)\varphi-(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\sin n\varphi+(\cos\varphi+i\sin\varphi)\sin\varphi$$
$$=\cos(n+1)\varphi\cdot\sin(n-1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi\cdot\sin(n-1)\varphi-\cos\varphi\cdot\sin n\varphi-i\sin^2 n\varphi+\cos\varphi\cdot\sin\varphi+i\sin^2\varphi$$
$$=[\cos(n+1)\varphi\sin(n-1)\varphi-\cos n\varphi\sin n\varphi+\cos\alpha\sin\varphi]+i[\sin(n+1)\varphi\sin(n-1)\varphi-\sin^2 n\varphi+\sin^2\varphi]$$
$$=\frac{1}{2}[(\sin 2n\varphi-\sin 2\varphi)-\sin 2n\varphi+\sin 2\varphi]+i[(\cos 2\varphi-\cos 2n\varphi)-(1-\cos 2n\varphi)+(1-\cos 2\varphi)]$$
$$=0$$

په همدې توګه $\cos\varphi-i\sin\varphi$ جذر د مقسوم افاده لـه صـفر سره مسـاوي کـوي، يعنـې مقسـوم پـر فرض شوي مقسوم عليه د تقسيم وړتيا لري.